

Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular¹

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Marisa Quaresma
*Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa e
Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela*
marisa-quaresma@hotmail.com

Resumo. Este artigo apresenta a preparação e concretização de uma unidade de ensino para o 5.º ano sobre a noção e representação de número racional, a comparação e ordenação de números racionais e equivalência de frações que tem por base uma abordagem com representações múltiplas, de cunho exploratório, em conformidade com as actuais orientações curriculares. O modo como decorreu a unidade e o balanço das aprendizagens dos alunos sustentam, em termos globais, a conjectura geral de ensino-aprendizagem, sendo notada a necessidade de trabalhar mais os problemas com frações impróprias e a densidade dos números racionais. Apontam-se ainda possíveis alternativas a investigar futuramente, no que se refere à representação na recta numérica, à abordagem à equivalência de frações e ao trabalho no significado razão.

Palavras-chave. Números racionais, Representação, Tarefas de Exploração, Comparação, Ordenação, Equivalência

Abstract. This paper presents the preparation and implementation of a teaching unit for grade 5 pupils on the concept and representation of rational numbers, the comparison and sorting of rational numbers and equivalence of fractions, based on an exploratory approach with multiple representations, aligned with current curriculum guidelines. The way the unit unfolded and the results regarding pupils' learning support, overall, the general teaching and learning conjecture. It was noted the need to continue working with improper fractions, and the density of the rational numbers. Some possible alternatives to investigate in the future are suggested, regarding the representation on number line, the approach to the equivalence of fractions, and work in the ration meaning of rational numbers.

Keywords. Rational numbers, Representation, Exploration tasks, Comparison, Sorting, Equivalence.

Introdução

O currículo de Matemática tem uma importância fundamental para as aprendizagens dos alunos. O conceito de currículo, no entanto, é usado com significados distintos, uns mais abrangentes que outros. Um nível importante do currículo é o dos normativos legais (currículo oficial) que, em Portugal, se expressa essencialmente nos programas de Matemática. Por outro lado, como referem Stein, Remillard e Smith,

¹ Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante*.

Trabalho realizado no âmbito do *Projeto PPPM – Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

(2007), são diversos os níveis que se situam entre o currículo oficial e as aprendizagens efectivas dos alunos (currículo aprendido), incluindo os manuais escolares e outros suportes para o ensino-aprendizagem (currículo implementado) e as práticas de ensino dos professores (currículo em ação). É de notar que, para além da natural influência que o currículo oficial exerce sobre o currículo implementado e este sobre o currículo em ação e o currículo aprendido, existem muitas outras influências internas e externas ao sistema educativo que podem originar divergências significativas entre os diversos níveis e movimentos de reajustamento curricular mais ou menos frequentes e profundos (Howson, Keitel, & Kilpatrick, 1981).

O desenvolvimento curricular diz respeito à produção de documentos e artefactos de natureza diversa, incluindo tanto normativos gerais como materiais para suporte ao trabalho na sala de aula e outros documentos de apoio para alunos e professores. Uma atividade específica de desenvolvimento curricular é a concepção e desenvolvimento de unidades de ensino sobre tópicos do programa de Matemática. Estas unidades são um elemento importante na concretização das orientações curriculares, mostrando como estas podem ganhar forma na sala de aula e ajudando a identificar eventuais dificuldades de realização.

Na concepção de uma unidade de ensino sobre um certo tópico, para além das orientações gerais do programa, é preciso ter em conta o conhecimento já existente sobre o ensino e a aprendizagem desse tópico bem como os recursos didáticos e tecnológicos disponíveis. Assim, o presente trabalho, que se centra sobre o ensino-aprendizagem dos números racionais no 5.º ano de escolaridade, procura ter em atenção a vasta literatura sobre este tópico bem como os recursos existentes no nosso país para apoiar o seu ensino.

Embora as tarefas a propor aos alunos sejam um elemento fundamental de uma unidade de ensino, esta é mais que um simples conjunto de tarefas. A sua concepção deve ter subjacente uma conjectura como, em certas condições, os alunos podem aprender o tópico em causa (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Neste caso, a conjectura tem por base uma perspectiva sobre as tarefas a propor aos alunos (natureza, contextos, significados e grandezas envolvidas) bem como as representações a privilegiar e, ainda, o modo de trabalhar na sala de aula (incluindo momentos de trabalho individual, em pares e pequeno grupo e de discussão colectiva).

A realização de unidades de ensino dá indicações sobre o modo como pode ser concretizado o programa de Matemática. No entanto, não se deve perder de vista que há

sempre muitas maneiras de concretizar um programa, ficando em aberto a possibilidade de surgirem outras concretizações, eventualmente mais adequadas. Além disso, não se pode esperar que na realização de uma unidade de ensino tudo decorra de acordo com o previsto. Por isso, constitui um factor de interesse estudar os eventos inesperados e saber que ensinamentos se podem extrair deles para aperfeiçoar a unidade para futuras realizações com outras turmas.

O objectivo deste estudo é perceber de que modo uma unidade de ensino de cunho exploratório, que promove o trabalho com diferentes representações de número racional, envolvendo diferentes significados, diferentes tipos de grandeza e diferentes tipos de tarefa, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação e comparação de números racionais e equivalência de frações em alunos do 5.º ano. O artigo apresenta uma breve revisão de literatura sobre a aprendizagem dos números racionais, com ênfase no conceito e significados, representações, comparação e ordenação, bem como a metodologia de investigação, baseada numa experiência de ensino. De seguida, apresenta a unidade de ensino e o modo como foi concretizada na sala aula, referindo alguns momentos de trabalho e fazendo um balanço geral. Por fim, faz uma avaliação global da unidade e apresenta questões para aprofundamento futuro.

A aprendizagem dos números racionais

Para além das orientações curriculares actuais, a elaboração desta unidade de ensino tem por base uma revisão da literatura sobre a aprendizagem dos números racionais que permitiu conhecer teorias, estudos empíricos e tarefas concebidas para promover a aprendizagem dos números racionais. Essa revisão salienta a importância da construção de partes e a reconstrução da unidade, a conversão entre e dentro das diversas representações e as dificuldades dos alunos na ordenação e comparação dos números racionais e na equivalência de frações.

Conceito e significados. Muitos alunos têm dificuldades na aprendizagem dos números racionais. Por vezes, alguns perdem de vista a necessidade de todas as partes em que a unidade está dividida serem iguais, contam as partes incorrectamente e, dada uma parte, têm dificuldade em relacioná-la com o todo correspondente. Mesmo quando parecem já ter algum conhecimento dos números racionais, parece faltar a alguns alunos uma noção quantitativa de número racional, incluindo a percepção de que os números

racionais são números e a compreensão que podem ser representados de várias formas (Post, Behr & Lesh, 1986).

O conceito de número racional é multifacetado, distinguindo-se vários significados. Referindo-se à representação em fração, Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) sistematizam estes significados do seguinte modo: (i) *parte-todo*, identificando o número de partes que se tomam do todo, significado fundamental para a compreensão dos restantes; (ii) *razão*, comparando duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta; (iii) *operador*, transformando o cardinal de um conjunto discreto; (iv) *quociente*, resultante da divisão de dois números naturais; e (v) *medida*, comparando duas grandezas, uma delas tomada como unidade.

Representações. As representações desempenham um papel fundamental no trabalho com números racionais. Para Goldin (2003), uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objectos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa. Representar um número significa atribuir-lhe uma designação, podendo um número ter várias designações. O numeral decimal, a fração, a percentagem, a recta numérica e as linguagens natural e pictórica são representações que um número racional pode tomar e que os alunos devem compreender.

Na sequência do trabalho realizado pelo *Rational Number Project*, Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) sugerem que a compreensão dos números racionais está relacionada com três aspectos: (i) flexibilidade na conversão entre diferentes representações; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) independência progressiva de representações pictóricas e de materiais manipuláveis. Este projecto desenvolveu um modelo de ensino baseado na conversão dentro e entre representações segundo o qual o desenvolvimento de uma compreensão profunda exige experiência em diferentes representações e conversões. É através do processo de reinterpretação de ideias e conceitos requerida pelas conversões que os alunos adquirem novos conhecimentos e reforçam os conhecimentos anteriores, alcançando uma compreensão mais ampla e profunda das ideias matemáticas.

A representação em fração origina muitas dificuldades. Por exemplo, Monteiro e Pinto (2007) indicam que, comparando os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, os alunos referem que $\frac{1}{4}$ é maior do que $\frac{1}{3}$ porque 4 é maior que 3. Este erro muito vulgar é um indicador de que o aluno não compreendeu ainda a representação fracionária. Outros alunos dizem, por exemplo, que $\frac{1}{2} = 1,2$, não relacionando as representações com os números em causa.

Estes erros revelam que o sistema de numeração decimal não está completamente entendido.

Monteiro e Pinto (2007) referem também algumas dificuldades dos alunos no trabalho com os numerais decimais: (i) confundindo décimas e centésimas, não distinguindo 2,5 e 2,05; (ii) confundindo o número de algarismos e a grandeza, quando, por exemplo, dizem que 1,456 é maior que 1,5; e (iii) considerando não existirem números racionais entre 0,1 e 0,2.

A representação em percentagem faz parte do quotidiano dos alunos. Parker e Leinhardt (1995) consideram que a percentagem faz a ligação entre situações do “mundo real” e conceitos matemáticos de estruturas multiplicativas. Indicam, contudo, que as percentagens originam diversas dificuldades: (i) na compreensão do símbolo %, (ii) fazendo conversões incorretas como 150% em 0,150 e 0,8 em 8%, (iii) escrevendo, por exemplo, que $60 = 50\%$ de 30, e (iv) no cálculo de percentagens superiores a 100%.

Pelo seu lado, Cox (1999) refere que alguns alunos produzem representações pictóricas parciais da situação, que parecem servir principalmente como apoio de memória, enquanto outros constroem representações bastante compreensíveis. O autor sugere que as representações pictóricas são úteis para o raciocínio, pois ajudam a representar a informação do problema e facilitam a mudança de estratégias de resolução.

A representação geométrica constitui também um recurso didáctico importante, permitindo evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza (Monteiro & Pinto, 2007). Para Bright, Behr, Post e Wachsmuth (1988) a recta numérica difere das outras representações pois não só sugere a iteração da unidade, mas também a subdivisão simultânea de todas as unidades iteradas. O seu estudo com alunos do 7.º ano mostra que estes têm dificuldade em marcar frações na recta numérica quando o número de partições da recta é diferente do denominador das frações, mesmo quando o número de partes é múltiplo ou submúltiplo do denominador.

Finalmente, a representação verbal desempenha um papel fundamental no trabalho com números racionais, nomeadamente na comunicação oral. Streefland (1991) sublinha que as frações devem ser trabalhadas a partir dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Geralmente, os alunos começam por usar uma mistura de representações verbais e pictóricas (desenhos ou esquemas) que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respectiva solução.

Comparação e ordenação de números racionais. Post, Behr e Lesh (1986) consideram que no modo como os alunos começam a pensar a ordenação dos números racionais há uma influência inicial inevitável e, por vezes, persistente, dos seus conhecimentos sobre números naturais o que afecta negativamente a sua capacidade de compreender a relação de ordem dos números racionais. Ao contrário dos números naturais, nos racionais não existe uma relação de ordem simples e óbvia. De facto, são necessárias diferentes estratégias para comparar, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{9}$. Os autores sugerem que a chave da questão está em colmatar a lacuna conceptual entre as estruturas aditivas e multiplicativas pois os reflexos dos números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Para além disso, Post et al. (1986) apontam que a noção quantitativa de número racional deve incluir a compreensão de que este inclui um sentido absoluto e um sentido relativo. Assim, a grandeza relativa de um par de números racionais pode ser avaliada apenas quando estes são relacionados com a unidade. Finalmente, os autores referem a importância de compreender que a relação entre numerador e denominador define o significado de uma fração e não as respectivas grandezas absolutas vistas de forma independente. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{4}{9}$, embora os dígitos que surgem em $\frac{1}{2}$ sejam menores do que os seus correspondentes em $\frac{4}{9}$.

Diversos estudos apontam estratégias espontâneas informais que os alunos usam em tarefas de comparação de frações. Uma delas, o *pensamento residual* (Post et al., 1986), refere-se à quantidade que é necessária para construir o todo. Na comparação entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, os alunos podem perceber que no primeiro falta $\frac{1}{6}$ para completar o todo (valor residual) enquanto no segundo só falta $\frac{1}{8}$ e concluir então que $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. Outra estratégia é a *utilização de pontos de referência*, que envolve a comparação de duas frações utilizando uma terceira como referência, como $\frac{1}{2}$ ou 1. Por exemplo, um aluno que utiliza esta estratégia diz que $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, porque a primeira fração é maior do que a metade e a segunda é menor que a metade. Outra estratégia, ainda, é o *pensamento diferencial*. Alguns alunos afirmam que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque ambos exigem apenas uma parte para formar o todo. Neste caso os alunos focam-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, não considerando o valor real da fração. Esta é uma forma de pensar característica dos números naturais que conduz geralmente a resultados

incorrectos. Deste modo, os alunos que usam pensamento residual e pontos de referência tendem a ser melhor sucedidos do que os que usam pensamento diferencial. A comparação de duas frações através da sua transformação em frações equivalentes com denominadores comuns é pouco frequente em alunos do 5.º ano, sendo mais comum comparar e ordenar números racionais transformando-os em numeral decimal (Bezuk & Cramer, 1989) e, eventualmente, representando-os na recta numérica.

A experiência de ensino como instrumento de desenvolvimento curricular

As experiências de ensino (*teaching experiments*) têm vindo a merecer um interesse crescente como modo de construção de novo conhecimento em educação matemática. Na base desse interesse está o reconhecimento por parte dos investigadores do fosso entre a prática de investigação e a prática de ensino da Matemática (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer e Schauble, 2003). De acordo com Steffe e Thompson (2000), esta metodologia de investigação tem raízes profundas na educação matemática, envolvendo procedimentos padronizados com os quais o investigador constrói estratégias para conhecer o modo de pensar dos alunos.

Cobb et al. (2003) indicam cinco características comuns às experiências de ensino que têm sido desenvolvidas no ensino da Matemática. A primeira respeita à sua finalidade, que é desenvolver novas teorias sobre o processo de aprendizagem e sobre os meios para apoiar a aprendizagem, seja a aprendizagem individual de um aluno, de uma turma, de um grupo de professores, ou de uma escola ou grupo de escolas. A segunda é a sua natureza de intervenção, investigando as possibilidades de melhoria da educação ao conceber novas formas de aprendizagem com o objectivo de as estudar. Uma experiência de ensino tem em conta a investigação anterior no domínio do estudo e, ao contrário do que acontece numa investigação naturalista, o investigador tem algum controlo sobre o processo de aprendizagem. Além disso, ao tentar apoiar uma forma específica de aprendizagem, tem maior possibilidade de descobrir factores relevantes que contribuem para o seu surgimento e conhecer as inter-relações entre esses factores. A terceira característica indica que a experiência de ensino cria condições para desenvolver teorias e colocá-las sob escrutínio, tendo portanto duas faces: prospectiva e reflexiva. Por exemplo, durante uma experiência de ensino na sala de aula, pode ser testada uma conjectura inicial sobre a interação entre as características das tarefas e as respostas dos alunos. Se esta conjectura é refutada, outras conjecturas podem ser

formuladas e testadas. A quarta é a natureza interactiva das experiências de ensino, que se desenvolvem em ciclos de invenção e revisão. Isto obriga a dar uma atenção sistemática às evidências sobre a aprendizagem e requer muitas vezes o desenvolvimento de medidas sensíveis a mudanças na ecologia da aprendizagem. Finalmente, a quinta característica é que as teorias desenvolvidas durante uma experiência de ensino são modestas, no sentido em que dizem respeito a processos específicos de um dado domínio da aprendizagem e são relativas às opções de *design* assumidas.

Para Cobb et al. (2003), a realização de uma experiência de ensino envolve a formulação de uma intenção teórica directamente relacionada com o objectivo do estudo. Para além disso, a realização da experiência deve atender aos conceitos e formas de raciocínio da disciplina que constituem os objectivos de aprendizagem dos alunos, bem como os pressupostos sobre os conhecimentos prévios dos alunos e os processos de interação social que terão lugar. Finalmente, com os pontos de partida, os elementos da trajectória e os objectivos almejados especificados, o desafio é construir um *design* que inclua conjecturas poderosas sobre as mudanças no raciocínio dos alunos e o modo de apoiar essas mudanças.

Metodologia de investigação

O presente trabalho segue uma metodologia mista, qualitativa e quantitativa (Bogdan & Biklen, 1994). A unidade de ensino foi lecionada nas aulas de uma turma de um dos autores deste artigo, que actuou simultaneamente como professora e como investigadora. A turma é composta por 22 alunos, 9 raparigas e 13 rapazes, com idades entre 10 e 12 anos (a maioria com 10 anos), que revelam poucos hábitos de trabalho e um empenho heterogéneo, mas são receptivos a novos tipos de tarefa e mantêm um ritmo de trabalho equilibrado. Procuramos perceber de modo aprofundado a evolução de um aluno, seguindo com especial atenção o percurso de Leonor, uma das alunas da turma com melhor nível de desempenho

Todas as aulas da unidade de ensino e as entrevistas realizadas a Leonor (antes e depois da leção da unidade) foram registadas em vídeo e áudio. Foram também recolhidos e analisados os trabalhos escritos realizados pelos alunos na aula. Além disso, como registo de observação, foram feitas anotações num diário de bordo sobre o modo como decorreram as aulas. Foram aplicados à turma dois testes, um de

diagnóstico e outro no final. O teste diagnóstico teve como objectivo verificar os conhecimentos informais que os alunos já possuíam sobre o conceito de número racional, em especial no que se refere às representações, ordenação e comparação de número racional, assuntos que os alunos nunca tinham estudado formalmente. As tarefas incluídas neste teste apresentam diferentes representações de número racional – fração, decimal, percentagem, pictórica e verbal –, diversos significados – parte-todo, razão, quociente, medida e operador – envolvendo quantidades contínuas e discretas em situações contextualizadas ou puramente matemáticas. Pelo seu lado, o teste final, teve por objectivo verificar as aprendizagens dos alunos resultantes da experiência de ensino. Este teste foi elaborado de modo a ser, tanto quanto possível paralelo ao primeiro, seguindo a mesma estrutura mas com questões mais complexas.

Para a análise dos dados foram transcritas, integralmente, as gravações vídeo das entrevistas. Os dados foram interpretados segundo uma categorização elaborada a partir das questões do estudo e que incluía: (i) dificuldades e erros que os alunos cometem na utilização das várias representações de número racional (verbal, decimal, pictórica, numeral decimal, fração e percentagem); (ii) estratégias e dificuldades reveladas pelos alunos na construção de partes e na reconstrução da unidade, utilizando diferentes representações; e (iii) estratégias e dificuldades apresentadas pelos alunos na comparação e ordenação de números racionais e na equivalência de frações.

A preparação da unidade de ensino

Apresentamos, de seguida, a unidade de ensino sobre “Noção e representação, comparação, ordenação e equivalência de números racionais”, através da qual se concretiza a experiência de ensino delineada, indicando as respectivas orientações gerais e hipótese de ensino-aprendizagem, com destaque para as tarefas e representações, bem como a planificação, dinâmica da aula e formas de avaliação.

Opções fundamentais

Orientações gerais. Esta unidade de ensino situa-se no quadro do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) que, no 2.º ciclo, atribui um papel importante aos números racionais. Assim, abordam-se os subtópicos: (i) Noção e representação de número racional; (ii) Comparação, ordenação e equivalência; e (iii) Percentagens. Os materiais de apoio ao programa divulgados pela DGIDC (Menezes et

al., 2009) sugerem a utilização de 7,5 blocos (de 90 minutos) para tratar estes três pontos. Devido às dificuldades dos alunos com os numerais decimais e ao facto de se pretender utilizar uma grande diversidade de representações, decidiu-se atribuir 9 blocos à realização de tarefas e 1 bloco adicional para a realização de um teste de avaliação.

A concepção da unidade de ensino segue as orientações gerais do *Programa de Matemática* (ME, 2007) e das *Normas* do NCTM (2007), segundo as quais:

- Os alunos devem ter experiências matemáticas diversificadas, realizando explorações, problemas e exercícios.
- As tarefas devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos, apresentadas de modo realista, de forma a capitalizar o seu conhecimento prévio.
- Os alunos devem compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas e desenvolver a capacidade de passar informação de uma representação para outra.
- O ensino-aprendizagem deve prever momentos para o confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas.
- O professor deve dar atenção aos raciocínios dos alunos, valorizando-os, procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas.
- Os alunos devem ter oportunidade para trabalharem de diferentes formas na aula, individualmente, em pares, em pequeno grupo ou em colectivo.
- Ouvir, praticar, fazer, argumentar e discutir são actividades importantes na aprendizagem da Matemática.

Além disso, a unidade de ensino procura seguir de perto as indicações específicas do *Programa de Matemática* (ME, 2007) respeitantes aos números racionais, segundo o qual os alunos devem desenvolver o sentido de número racional bem como a capacidade para utilizar os seus conhecimentos sobre estes números para resolver problemas em contextos diversos. Para isso, os alunos devem ser capazes de resolver problemas, compreender e ser capazes de usar propriedades e representações dos números racionais e de apreciar a ordem de grandeza dos números.

A unidade de ensino procura igualmente promover as capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação matemática dos alunos. Para isso, contempla tarefas de natureza exploratória e problemas cuja resolução visa proporcionar

aos alunos experiências de aprendizagem significativas para o desenvolvimento do raciocínio matemático e da capacidade de resolução de problemas. Tendo em vista o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos, o trabalho na sala de aula valoriza o trabalho em grupo e em pares e os momentos de discussão colectiva.

A revisão da literatura e as actuais orientações curriculares sugerem uma estratégia de ensino para levar os alunos a desenvolverem o sentido do número racional deve, nomeadamente: (i) ter como base os conhecimentos que os alunos já possuem anteriormente; (ii) enfatizar as inter-relações entre os significados parte-todo, quociente, razão, medida e operador; (iii) contemplar os diferentes tipos de unidades e a respectiva construção; (iv) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional (decimal, fração, pictórica, percentagem, reta numérica e verbal); e (v) tratar a ordenação e a comparação de números racionais e a equivalência de frações antes das operações com frações.

A organização da unidade de ensino teve também por base o conhecimento prévio sobre os alunos a quem foi lecionada. A professora da turma já conhecia os alunos desde o início do 1.º período e antes da unidade foi realizado um teste diagnóstico tendo em vista identificar os conhecimentos dos alunos sobre números racionais. Este diagnóstico mostrou que os alunos sabiam usar frações unitárias como operadores. Contudo, este conhecimento tem um cunho essencialmente numérico, relacionado com a ideia de divisão cujo divisor é o denominador da fração unitária. Os alunos não conheciam a linguagem própria das frações, dizendo “segunda parte” para se referirem a um meio e “terceira parte” para se referirem a um terço. Além disso, mostraram algumas dificuldades na compreensão do sistema de numeração decimal e na compreensão dos números racionais na representação decimal. Deste modo, considerou-se necessário dar maior ênfase à representação decimal do que a inicialmente prevista, procurando clarificar os aspectos essenciais do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais.

Conjetura de ensino-aprendizagem

Os princípios sobre o desenvolvimento curricular apresentados anteriormente e a literatura sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais levaram a formular a conjectura de ensino-aprendizagem segundo a qual os alunos desenvolvem a sua compreensão e o seu sentido de número racional ao trabalharem *em simultâneo as*

várias representações de número racional (com relevo para as frações e numerais decimais) em *diferentes significados* (com relevo para parte-todo e medida), realizando *tarefas de natureza diversificada* (com relevo para as de natureza exploratória) envolvendo *diferentes tipos de grandezas* (tanto discretas como contínuas).

Tarefas. Nesta unidade de ensino toma-se como pressuposto que aquilo que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da actividade que realizam e da reflexão que efetuam sobre essa actividade (Christiansen & Walther, 1986). Assume-se, ainda, que a actividade que tem lugar na aula de Matemática baseia-se fundamentalmente na realização de tarefas e o desenvolvimento de uma actividade matemática, rica e produtiva por parte dos alunos deve basear-se em tarefas de natureza diversificada. A presente unidade de ensino dá ênfase à diversidade de tarefas, sendo constituída por explorações, problemas e exercícios (Ponte, 2005). Os exercícios são tarefas estruturadas de desafio reduzido que visam sobretudo a consolidação de conhecimentos, os problemas as tarefa estruturadas de desafio elevado que visam a aplicação criativa dos conhecimentos que o aluno já possui e as explorações as tarefas pouco estruturadas de desafio reduzido que visam sobretudo a construção de novos conceitos. O professor deve seleccionar as tarefas de acordo com os objectivos definidos para cada aula, tendo em atenção a sua adequação aos alunos a que se destina.

As tarefas foram seleccionadas tendo em conta os significados parte-todo, razão, operador, quociente e medida. Os significados que receberam maior atenção foram parte-todo e medida, seguindo-se quociente e operador e, por último, o significado razão. As grandezas em causa eram tanto de natureza discreta como contínua e as unidades eram simples e compostas. Tal como sugere Gravemeijer (2005), as tarefas propostas têm, tanto quanto possível, contextos significativos “para ajudar os alunos a encurtar o fosso entre o seu conhecimento pessoal e o conhecimento formal da Matemática” (p. 2) e a construir um novo conhecimento matemático, sobre o que já sabem, para que construam conhecimento com significado.

Representações. A estrutura desta unidade de ensino foi concebida tendo em atenção que o pleno conhecimento dos números racionais passa pelo conhecimento das suas diferentes formas de representação (NCTM, 2007). Os alunos não só devem ser fluentes a usar as diversas representações, como devem ser capazes de passar facilmente de uma representação para outra, bem como ser capazes de decidir a representação a utilizar para resolver um problema.

As representações chave são a fração e o numeral decimal. No entanto, é também bastante usada a representação pictórica. Para além disso usam-se numerais mistos e percentagens. Ao longo de toda a unidade, valorizam-se as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, privilegiam-se os processos informais e as representações que os alunos já conhecem para a partir daí introduzir, gradualmente, novas representações formais de número racional (Kieren, 1988; Webb, Boswinkel & Dekker, 2008). Em particular, a representação dos números racionais, parte de materiais concretos e usa com frequência representações pictóricas para que depois os alunos possam chegar à formalização dos conceitos matemáticos. Contudo, a introdução das novas representações não significa o abandono das representações anteriores. Pelo contrário, os alunos devem continuar a usar as representações que já conhecem, adquirindo flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto e situação.

Planificação

Planificar o ensino envolve tomar decisões sobre os conteúdos, objectivos de aprendizagem e as tarefas a propor. Esta unidade de ensino constitui aquilo que Simon (1995) denomina de trajectória hipotética de aprendizagem, um caminho de ensino-aprendizagem constituído, neste caso, por 7 fichas de trabalho organizadas a pensar nas ideias e processos matemáticos que se pretende que os alunos desenvolvam. Todas as fichas de trabalho têm uma característica comum – usar diferentes representações e significados, para que os alunos adquiram flexibilidade na conversão de números em várias representações e para que possam trabalhar os diversos significados de número racional de uma forma integrada.

A unidade começa (Ficha 1) com tarefas envolvendo diferentes representações de número racional – verbal, pictórica, decimal, fração (própria) e percentagem – procurando evidenciar as conversões entre elas. De seguida (Fichas 2 e 3), propõe tarefas na representação decimal, em diferentes contextos, para relembrar conceitos já trabalhados nesta representação durante o 1.º ciclo, como a comparação e ordenação, onde os alunos mostraram dificuldade no diagnóstico. Posteriormente, introduz as frações impróprias e os numerais mistos fracionários, como outra forma de representar números racionais. Nesta altura trabalha-se também a construção de partes e a reconstrução da unidade na representação fracionária (usando frações próprias e impróprias) e a percentagem (utilizando a representação pictórica como apoio para que

os alunos possam visualizar as transformações). Esta abordagem inicial, feita ao longo de 4 blocos de 90 minutos tem como principal objectivo desenvolver nos alunos o conceito de número racional e a noção de que estes números podem ser representados de diferentes formas, desenvolvendo flexibilidade nas conversões entre e dentro dessas representações.

Numa segunda etapa, de 5 blocos (Fichas 4-7), são introduzidas tarefas relacionadas com partilha equitativa, comparação e ordenação de números racionais e equivalência de frações. A comparação de frações é um tópico onde os alunos mostram muitas dificuldades, sendo por isso introduzida pela comparação entre pares de frações com numeradores iguais e com denominadores iguais. Pelo seu lado, a ordenação é realizada principalmente a partir de números representados em fração, decimal e percentagem. Inicialmente, são apresentadas frações simples que os alunos facilmente relacionam com as outras representações. Seguidamente, é abordada a noção de frações equivalentes e, com base nela, é estudada a densidade dos números racionais. Para dar consistência ao trabalho de ordenação e comparação de números racionais, é introduzida a recta numérica. Finalmente, a unidade de ensino aborda ainda a percentagem como operador.

A unidade de ensino é composta por sete fichas de trabalho constituídas por uma diversidade de tarefas em vários contextos, representações e significados. Cada uma das fichas de trabalho tem um conjunto de objectivos definido para a aprendizagem dos tópicos abordados, consistente com esta diversidade e com a hipótese geral de ensino-aprendizagem. A planificação inicial sofreu alguns ajustamentos durante a realização da unidade de ensino no que diz respeito ao tempo previsto para o desenvolvimento de algumas tarefas. Esta necessidade surgiu de alguma falta de autonomia dos alunos e de algumas dificuldades pontuais num ou noutro conceito. O Anexo 1 apresenta uma planificação da unidade, onde constam ainda os tópicos abordados em cada aula, a natureza das tarefas, o tempo dedicado à resolução das tarefas, bem como as representações, significados, grandezas e modo de trabalho usado.

Dinâmica da aula

A actividade realizada na sala de aula envolve diferentes modos de trabalho. Usa-se o trabalho em grupo e em pares tendo em vista proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de partilha e discussão, mas existem também momentos de trabalho individual. Deste modo, “os alunos podem assim participar em dois níveis do

discurso da aula – o colectivo e o que desenvolvem com o seu parceiro de aprendizagem” (Ponte et al., 1997, p. 94). O diálogo na sala de aula e a interação social são utilizados para promover o reconhecimento de conexões entre ideias e a reorganização do conhecimento (NCTM, 2007).

A aula estrutura-se segundo as três fases essenciais indicadas por Ponte (2005): (i) A apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam; (ii) O desenvolvimento do trabalho pelos alunos; e (iii) A discussão/reflexão final. Esta última fase é muito importante pois, segundo Bishop e Goffree (1986), é a ocasião mais apropriada para que sejam expostas conexões e significados, já que um bom momento de reflexão pode permitir aos alunos ligar ideias sobre vários temas, mostrando como as ideias matemáticas são interligadas. Os momentos de discussão constituem, por isso, oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). De acordo com o NCTM (2007),

A aprendizagem com compreensão poderá ainda ser aperfeiçoada através das interações na turma, à medida que os alunos sugerem ideias e conjecturas matemáticas, aprendem a avaliar o seu próprio raciocínio e o dos colegas, e desenvolvem capacidades de raciocínio Matemático. Como tal, cada tarefa culmina sempre com um momento de discussão colectiva, como forma de reflectir, discutir ideias, processos e conclusões (p. 23).

Os momentos de discussão das tarefas são também importantes para o desenvolvimento da comunicação, uma das três capacidades transversais indicadas no novo *Programa de Matemática* (ME, 2007).

Avaliação dos alunos

A avaliação dos alunos nesta unidade de ensino usa diversos instrumentos. Na concepção da unidade foi considerada a avaliação de diagnóstico, de forma a identificar os conhecimentos anteriores dos alunos. No decorrer da unidade foi utilizada uma avaliação formativa tendo em vista apoiar o progresso dos alunos, diagnosticando problemas e insuficiências na sua aprendizagem e no seu trabalho (ME, 2007). Para isso foram considerados (i) as apresentações e discussões orais das tarefas bem como (ii) as produções escritas dos alunos da resolução das tarefas. No final da unidade, foi tido em conta o teste escrito final de cada aluno, o seu desempenho no decorrer da unidade e

ainda, no domínio das “atitudes e valores”, o seu empenho na aula, participação oral, capacidade de argumentação, realização de trabalho de casa e comportamento.

A realização da unidade de ensino

A unidade de ensino decorreu em Janeiro-Fevereiro de 2010, num total de 12 aulas de 90 minutos. A professora da turma, um dos autores deste artigo, lecionava Matemática, Ciências da Natureza, Estudo Acompanhado e Formação Cívica aos alunos desde o 1.º período, sendo além disso, a directora de turma.

Alguns momentos de trabalho

Apresentamos aqui alguns momentos de algumas aulas, que ilustram aspectos dos processos de trabalho e das aprendizagens dos alunos.

Ficha de Trabalho 1

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:

- a primeira em duas;
- a segunda em quatro;
- a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

Na questão 1 é dado o “todo” (uma tira de papel) e é pedido aos alunos que representem três partes diferentes. É uma situação contextualizada, com grandezas contínuas que envolve o significado parte-todo. A informação é dada na representação pictórica e a resposta pode ser dada nas representações verbal, decimal, fração ou percentagem. Os alunos mostram alguma dificuldade em interpretar o enunciado, pelo que a realização desta questão é antecedida por um momento de discussão colectiva.

Na sequência desta discussão, todos os grupos conseguem dar as suas respostas nestas cinco representações. Na terceira tira, todos os grupos usam corretamente a representação verbal, a fração, o quociente e a percentagem, mas, em geral, mostram dificuldades na representação em numeral decimal, principalmente devido à dificuldade em determinar a metade de 0,25 (Figura 1).

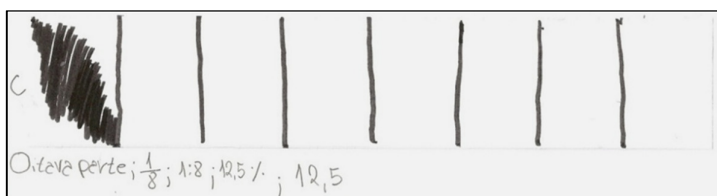


Figura 1 – Resposta de Leonor, Rui, Henrique e Tiago à questão 1.

A questão 2 pede aos alunos que relacionem entre si as três partes obtidas na questão anterior. É uma situação contextualizada, nos significados parte-todo e medida, com grandezas contínuas, sendo informação dada na representação pictórica. Na resposta não é pedida uma representação específica, sendo, contudo, expectável que os alunos usem as representações obtidas na primeira questão. A resolução desta questão é também precedida por uma negociação do trabalho a desenvolver, pois os alunos mostram dificuldade em compreender o que é “estabelecer relações”, comparando as partes obtidas. Assim, a professora pega nas duas primeiras tiras ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$) e pede aos alunos que as comparem. Alguns concluem visualmente que $\frac{1}{4}$ é metade de $\frac{1}{2}$ e este é então o mote para se iniciar o trabalho nos grupos.

Todos os grupos conseguem estabelecer algumas relações entre as partes mas só alguns conseguem comparar todas as tiras. Todos os grupos usam apenas a linguagem verbal para exprimirem essas relações (Figuras 2 e 3):

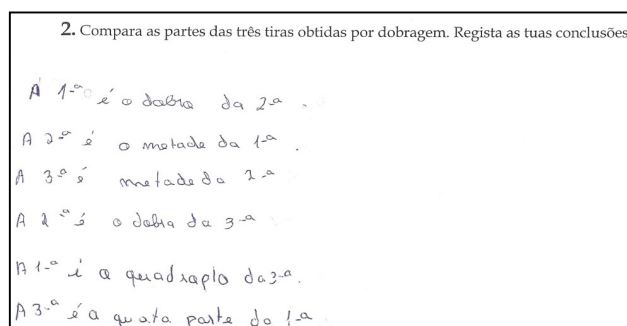


Figura 2 – Resposta Mariana, Elsa, Alexandre e Leonardo à questão 2.

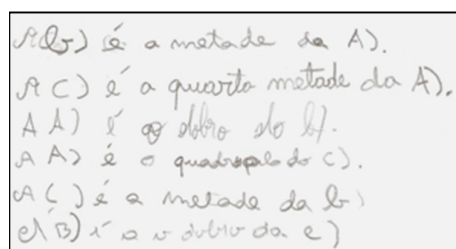


Figura 3 – Resposta de André, Francisco, Rodrigo e Miguel à questão 2.

Na discussão desta questão a professora pede a cada grupo que indique uma das relações que encontrou. Como os alunos só conseguem usar a representação verbal, a professora pede que completem com a linguagem matemática:

Daniel: A relação entre o primeiro e o segundo, é que o segundo é metade do primeiro.

Professora: Como é que eu posso escrever isso utilizando números? Como é que eu faço a metade?

André: Dividir por dois.

Rui: Um de quatro é igual a metade a dividir por dois.

André: A b é o dobro da c .

Professora: Como é que eu escrevo isso?

André: Um de quatro é o dobro.

Professora: Como é que é o dobro?

André: Duas vezes...

Professora: Duas vezes o quê?

André: Um traço oito.

Professora: Um oitavo. Um quarto é o dobro de um oitavo.

Alexandre: O primeiro é o dobro do segundo.

Professora: Como é que eu escrevo isso?

Alexandre: Um meio é o dobro de... Um sobre quatro.

Os alunos conseguem encontrar diversas relações entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. Contudo, exprimem-nas em linguagem verbal e mostram grandes dificuldades em representá-las utilizando linguagem matemática, o que é natural por se tratar da primeira aula de ensino formal deste tópico.

Ficha de Trabalho 4

Tarefa 1

Questão 1

1.1. Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizzas. Dividiram igualmente as três pizzas. Que parte da pizza comeu cada amigo?

1.2. Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma pizza? Explica o teu raciocínio.

Questão 2

2.1. Se em vez de quatro amigos fossem oito amigos, pedissem três pizzas e as dividissem igualmente, que parte de pizza comeria cada um?

2.2. Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma pizza? Explica o teu raciocínio.

Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais pizza? Explica o teu raciocínio.

A questão 1 é uma situação contextualizada e envolve grandezas contínuas no significado quociente. É pedido aos alunos que partilhem equitativamente três pizzas por quatro amigos e que depois comparem a quantidade que cabe a cada um com a unidade. A informação é dada verbalmente e não são dadas informações sobre a representação a utilizar na resposta.

Os alunos mostram-se muito entusiasmados e motivados na resolução desta questão e tentam dar “explicações” o mais completas possível. Começam por desenhar as três pizzas, mas depois alguns não conseguem repartir as pizzas pelos quatro amigos, nessa altura a professora sugere-lhes que atribuam nomes às fatias e a maioria dos alunos consegue resolver o problema, utilizando a representação pictórica, como se vê na resposta de Rui (Figura 4):



Figura 4 – Resposta de Rui à questão 1.1.

Durante a discussão colectiva da tarefa os alunos mostram-se bastante confiantes na sua resolução explicando com clareza a forma como pensaram:

Leonardo: Então nós fizemos três pizzas e dividimos...

Professora: Em quantas partes?

Leonardo: Em quatro.

Professora: E agora?

Leonardo: E depois contamos as “pizas” (partes) que cada um comeu.

Leonardo explica que no seu grupo começaram por “fazer” as três pizzas e depois dividiram-nas em quatro partes iguais. Os restantes alunos usam a representação pictórica para resolver esta tarefa. Contudo, não ficam apenas por esta representação, avançando com a representação em fração baseada nessa representação pictórica:

Professora: E depois fizeram mais alguma coisa?

Leonardo: Sim, fizemos contas.

Professora: Que contas fizeram?

Leonardo: Fizemos um sobre quatro...

Professora: Um quarto...

Leonardo: Vezes três é igual a três quartos.

Alguns alunos apresentam a parte que cada um come como produto $\frac{1}{4} \times 3$, revelando aqui um conhecimento intuitivo a partir do conhecimento dos números inteiros, uma vez que ainda não trabalharam formalmente a multiplicação entre números racionais e números inteiros. Outros alunos, como Amélia e Leonor que trabalham juntas durante toda a unidade de ensino, partem directamente da figura, revelando compreender também que cada parte representa $\frac{1}{4}$ da piza e, por consequência, se cada um come três fatias, significa que come $\frac{3}{4}$ da piza. Apesar de também recorrer à representação pictórica, Daniel partilha as pizzas de uma forma diferente dos restantes colegas (Figura 5):

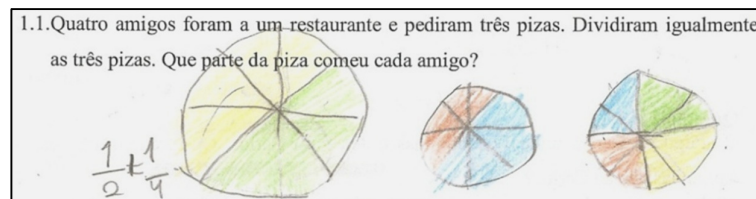


Figura 5 – Resposta de Daniel à questão 1.1

Daniel: Oh professora, eu tenho outra solução.

Professora: Sim, então diz lá a tua solução.

Daniel: Desenhámos 3 pizzas e depois dividimos em 8 partes. Depois o A come a metade, depois o B também come outra metade, o C come outra metade, o D come outra metade. Depois o A come mais duas fatias, e depois é sempre assim cada um come mais duas fatias.

Vários alunos da turma: Pois é, também dava assim. Era a mesma coisa.

O aluno divide a figura em oito partes e, se inicialmente se podia pensar que usava essa divisão para distribuir a piza pelos quatro amigos, isso não se veio a verificar pois consegue abstrair-se dessas divisões e usa outras equivalentes e mais simples. Daniel, começa por dizer que cada um come metade de uma piza, não utiliza a divisão em oito partes, e só usa essa divisão quando diz que na última piza cada um come mais duas fatias. Contudo, no momento seguinte, representa essas duas fatias por $\frac{1}{4}$:

Professora: Então e agora como é que eu posso representar isto?

Luís: Três de quatro.

A questão seguinte pede aos alunos que comparem a parte comida por cada amigo com a unidade. Alguns deles usam o conhecimento intuitivo e o sentido prático do dia-a-dia para responder à questão:

Professora: Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza?

Turma: Menos.

Professora: Menos, porquê Leonor?

Leonor: Porque eles comeram só $\frac{3}{4}$ e uma piza inteira tem $\frac{4}{4}$.

André: Oh professora e não é só isso, vê-se logo porque se há 3 pizzas eles são 4 não dá para comerem mais do que uma unidade.

Estes alunos comparam o todo e a parte, ou seja, percebem que o todo tem quatro partes mas cada amigo só come três dessas partes. Podemos dizer que transformam a unidade numa fração de numerador e denominador quatro e depois comparam apenas os numeradores.

A questão 3 pede aos alunos que comparem as partes obtidas em cada uma das questões anteriores ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$). É igualmente uma situação contextualizada com grandezas contínuas, mas envolvendo o significado medida. Nas questões anteriores houve oportunidade de comparar frações com denominadores iguais e esta questão envolve uma comparação entre frações com numeradores iguais e denominadores diferentes. Na sua discussão começou-se por estabelecer a relação entre o tamanho da parte que cabe a cada amigo nas duas situações ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$):

Professora: Qual a diferença entre aquilo que cada um come no primeiro caso e no segundo caso? O que é que se alterou?

Amélia: Foi que ficou partido em mais partes.

Professora: E o que é que aconteceu a cada parte?

Alunos: Ficou mais pequenino. Ficou a metade.

Leonor: Pois é $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$!

Professora: Quer dizer que cada um passou a comer que parte daquilo que comiam no primeiro caso?

Alunos: A metade.

Professora: Pois porque nós duplicámos o número de amigos, logo cada um teve de partilhar cada fatia com outro.

Os alunos, através das perguntas que lhes são feitas, referem que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$, porque, como justificam, cada parte passa a ser metade da anterior. Verifica-se que esta situação apresenta um contexto para eles significativo, sendo os próprios alunos que deduzem a relação em causa.

Balanço da unidade

Começando pela evolução global, devemos referir que, na primeira aula os alunos trabalham em grupo mas evidenciam muitas dificuldades no seu relacionamento interpessoal, sem conseguir distribuir tarefas e respeitar o tempo e o espaço uns dos outros. Em consequência, a professora sente necessidade de intervir com muita frequência para ajudar a ultrapassar conflitos dentro dos grupos e a concentração dos alunos na tarefa proposta fica aquém do esperado. Mesmo assim, os alunos atingem os objectivos previstos para esta aula. Note-se que alguns alunos têm noção desta dificuldade da turma, como Leonor que, na primeira entrevista, refere preferir trabalhar “sozinha ou com o colega do lado”. A constatação desta dificuldade leva a privilegiar o trabalho em pares, opção que se revela positiva, pois melhora bastante o ritmo de trabalho da turma e o empenho dos alunos que, de um modo geral, se mostram bastante cooperantes com o colega de mesa. Na entrevista final, Leonor comenta do seguinte modo o trabalho em pares: “conseguia aprender mais com a minha colega, ela também ouvia o que tinha para lhe dizer e depois partilhávamos”.

Desde o início do ano lectivo que, nas aulas de Matemática, se faziam momentos de discussão colectiva das tarefas. No entanto, nesta unidade estes momentos recebem uma ênfase especial, registando-se uma significativa evolução nos alunos. Inicialmente, estes mostram-se inibidos de intervir, mesmo quando têm uma resolução diferente da apresentada no quadro. Não tentam discutir nem procuram expor a sua resolução, esperando que seja a professora, como autoridade matemática, a dar o veredicto final sobre a correção da resolução apresentada. Como a professora se retira progressivamente desse papel, os alunos assumem-no a pouco e pouco. No início, têm dificuldade em fazer generalizações e não conseguem mobilizar argumentos para defender as suas ideias, o que se prende com outra dificuldade – organizar dados e apresentar uma justificação por escrito do seu raciocínio. Os alunos têm a concepção de que em Matemática não é preciso escrever, apenas fazer contas. Isso acaba também por influenciar as discussões orais, porque muitas vezes já não têm presente todos os pormenores da sua resolução das tarefas. A determinada altura, esta situação altera-se completamente e todos os alunos querem participar e apresentar a sua resolução, mesmo que já tivesse sido apresentada uma resolução semelhante por outro colega. Nas discussões colectivas, verifica-se ainda um efeito bastante positivo das tarefas com contextos significativos para os alunos, levando-os a ser muito mais participativos e gerando discussões bastante mais ricas. Gradualmente, a qualidade das discussões colectivas vai melhorando e, no final, as intervenções dos alunos já são bastante mais claras, usando melhores argumentos e uma melhor gestão do tempo. Os alunos apreciam muito as discussões colectivas, pois, como refere Leonor na entrevista final, estas são “interessantes porque assim íamos saber aquilo que os outros pensavam também. Às vezes havia resoluções diferentes daquilo que nós tínhamos feito”.

Os momentos de introdução das tarefas e de trabalho dos alunos em pares também melhoram visivelmente ao longo da unidade de ensino. Nas primeiras aulas, a professora tenta introduzir as tarefas sem discutir com os alunos o se pretende, mas rapidamente verifica que estes têm muita dificuldade em interpretar alguns enunciados e em formular conjecturas. Só avançam para a resolução efetiva das tarefas quando têm uma boa noção do que têm de fazer e do caminho a seguir, pelo que é necessário prolongar um pouco mais o momento de introdução das tarefas, com a discussão dos enunciados. Durante a unidade de ensino, à medida que os alunos já se sentem mais à vontade com os temas abordados, começam a ter mais iniciativa e formular cada vez mais conjecturas, nomeadamente quando trabalham em pares. Isso conduz a uma maior

eficiência neste momento da aula, tendo diminuído consideravelmente a quantidade de dúvidas apresentadas e permitindo à professora acompanhar melhor o trabalho de todos. Apesar das dificuldades inicialmente apresentadas, a evolução dos alunos tanto na forma de abordar as tarefas como na forma de as resolver, comunicar e discutir as resoluções é muito significativa.

Analisando a evolução nas aprendizagens relativas aos números racionais, devemos referir que, na primeira ficha de trabalho os alunos mostram alguma dificuldade na leitura e interpretação do enunciado, mas acabam por encontrar resoluções muito interessantes, usando uma diversidade de representações. De registar, também, as relações que, usando tiras de papel, de um modo informal, encontram entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$. A segunda ficha surge das dificuldades que os alunos apresentam no diagnóstico, ao confundir décimas e centésimas, revelando alguma incompreensão do sistema de numeração decimal e, por consequência, tendo dificuldade na ordenação dos numerais decimais. Os alunos têm aqui oportunidade de relembrar a construção da unidade a partir das partes, para ordenar e decompor decimais. Mobilizam conhecimentos adquiridos na ficha anterior e conseguem representar vários números na forma decimal, em fração e em percentagem.

A terceira ficha proporciona um trabalho interessante na aula, sendo a primeira vez que os alunos se deparam com números racionais maiores que a unidade, representados pictoricamente e em fração. Inicialmente, mostram-se um pouco desmotivados, sem perceber que o denominador diz respeito ao número de partes de cada unidade. Mas, através de um exemplo concreto (maças em representação pictórica), compreendem, por exemplo, que 5 maçãs têm 10 “metades”, o que facilmente associam à fração $\frac{10}{2}$. O mesmo acontece com os quartos, dividindo pictoricamente cada maçã em 4, concluindo, por comparação com o caso anterior, que são $\frac{20}{4}$. É interessante verificar como esta situação concreta ajuda os alunos a reestruturar o seu pensamento, levando-os a compreender melhor que o denominador diz respeito ao número de partes em que cada unidade está dividida. Isso confirma-se mais adiante quando os alunos têm de representar pictoricamente a fração $\frac{4}{3}$ e alguns referem ter de desenhar duas barras, pintar uma barra completa e ainda uma parte da segunda barra. A maioria dos alunos mostra compreender que uma fração imprópria é maior que a unidade e consegue representá-la pictoricamente e em fração. No entanto,

bastantes alunos mostram ainda alguma dificuldade na resolução de problemas envolvendo frações impróprias.

Um episódio interessante desta unidade de ensino verifica-se na quarta ficha, onde se esperava que os alunos tivessem dificuldade em repartir 3 pizzas por 4 pessoas. Contudo, eles conseguem resolver este problema pictoricamente no significado quociente. Revelam aqui bastante empenho e interesse, atribuindo significado ao contexto dos problemas. Esta ficha também proporciona uma discussão interessante sobre frações equivalentes. Quando um aluno diz que $\frac{9}{12}$ é a igual a $\frac{3}{4}$, os restantes são levados a reorganizar as 12 tampinhas de forma diferente concluindo que podemos ter um todo repartido de várias maneiras, mas representando a mesma quantidade. Regista-se aqui um ponto de viragem no trabalho dos alunos, que passam a revelar mais espírito crítico e a esforçar-se mais para justificar e explicar as suas ideias e resoluções.

A quinta ficha é dedicada ao trabalho sobre frações equivalentes e à densidade dos números racionais. Os alunos começam por pensar que a seguir a um dado número racional vem outro número racional, mostrando dificuldade em compreender a propriedade da densidade. Contudo, surpreendem pela forma como decompõem diversas frações, usando informalmente as operações de adição e multiplicação. A sexta ficha introduz a recta numérica. Os alunos conseguem marcar com facilidade na recta os pontos pedidos e relacioná-los com as distâncias percorridas numa corrida. Conseguem igualmente usar a fração como operador para calcular partes de um dado percurso. A sétima ficha propõe tarefas de conversão entre as várias representações de número racional (decimal, fração e percentagem) e problemas onde a percentagem surge como operador, mostrando os alunos um bom desempenho. No que respeita à utilização de percentagens como operadores, verifica-se que têm melhor desempenho nas percentagens de referência (25%, 50% e 75%) que relacionam com as frações.

A avaliação da unidade de ensino

Tal como referimos, foram realizados dois testes à turma, um de diagnóstico e outro no final. Trata-se, em ambos os casos, de testes que envolveram uma preparação cuidadosa, como instrumentos de avaliação das aprendizagens. No entanto, os testes não são comparáveis, uma vez que os itens do teste de diagnóstico são, de um modo geral, mais fáceis, que os do teste final.

Os itens usados nos testes podem ser agrupados em quatro categorias (Tabela 1). Os itens de representação incluem questões envolvendo diversas representações (verbal, decimal, fração, pictórica e percentagem). Pelo seu lado, os itens relativos a comparação, ordenação e equivalência de frações fazem intervir estas noções, usando sobretudo as representações decimal e fracionária.

Tabela 1: Desempenho dos alunos no teste diagnóstico e no teste final

Tipo de Questão	Teste Diagnóstico			Teste Final		
	N.º de itens	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas	N.º de itens	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
Representação	19	219	55%	15	240	76%
Comparação	9	74	40%	10	133	63%
Ordenação	6	38	30%	7	99	67%
Equivalência de Frações	2	4	12%	2	28	67%

Observando os resultados dos dois testes, verifica-se que em ambos os casos os alunos obtêm maior sucesso nas tarefas envolvendo a representação de números racionais. Nestas questões os alunos têm melhores resultados nas questões associadas a representações pictóricas (no teste diagnóstico, a percentagem de respostas corretas varia entre 0% e 86% e, no teste final, entre 62% e 90%) e piores resultados nas questões que pedem para usar exclusivamente frações (no teste diagnóstico, a percentagem de respostas corretas varia entre 0% e 57% e, no teste final, entre 38% e 86%). As melhores prestações verificam-se no significado parte-todo (no teste diagnóstico, a percentagem de respostas corretas varia entre 0% e 86% e, no teste final, entre 62% e 90%).

No teste diagnóstico, os alunos mostram níveis de desempenho mais baixos nos itens relativos a comparação e ordenação de números racionais (na forma decimal e fração) e equivalência de frações, o que é natural pois trata-se de assuntos que já estudaram há bastante tempo e de modo possivelmente superficial ou nunca estudaram.

No teste final, os resultados são satisfatórios em todas as categorias de itens. A percentagem de respostas correctas nas diversas categorias não oscila muito (mínimo de

63% e máximo de 76%), traduzindo de algum modo as características da turma, onde cerca de $\frac{1}{3}$ dos alunos tem bastante dificuldade em Matemática. Verifica-se um aumento mais significativo na percentagem das respostas correctas nos itens envolvendo ordenação e equivalência de frações, o que também é natural dado que só agora os alunos estudam formalmente estes tópicos.

Fizemos uma análise mais fina para tentar perceber a razão por que os alunos erraram algumas questões do teste final que, previsivelmente, poderiam ter respondido dado o seu desempenho no teste diagnóstico. Por exemplo, a questão 2 do teste diagnóstico e a questão 5 do teste final pedem aos alunos que representem pictoricamente um todo a partir de uma dada fração. Mas enquanto o teste diagnóstico pede que representem o todo partindo de uma fração própria unitária, o teste final pede que representem o todo a partir de uma fração imprópria, questão que tem um grau de dificuldade muito superior. Durante a unidade de ensino várias vezes os alunos manifestam dificuldades na representação de frações impróprias e alguns alunos não conseguem superar essa dificuldade, pelo que podemos considerar os resultados do teste final bastante positivos.

Outro exemplo é o item 15 de ambos os testes, que pede aos alunos para completar pictoricamente um todo a partir de uma dada percentagem. No teste diagnóstico 81% dos alunos acertam e no teste final só 62% o conseguem. No entanto, no teste diagnóstico a percentagem apresentada é 20%, sendo possível obter o todo através da iteração desta parte. No teste final, a percentagem apresentada é 80%, o que implica que os alunos têm de partir primeiro essa parte numa mais simples, para depois a iterar e obter o todo, e alguns apresentam dificuldade em dar o primeiro passo.

No fim da unidade de ensino, os alunos revelam muito maior à vontade na ordenação de numerais decimais do que no início, o que sugere que a decisão de introduzir muito cedo uma ficha quase exclusivamente dedicada ao trabalho com numerais decimais foi acertada, tal como a decisão de usar as diversas representações em simultâneo, verificando-se que os alunos melhoram bastante a sua compreensão do sistema de numeração decimal.

Conclusão

A unidade de ensino proporcionou importantes aprendizagens aos alunos. O trabalho com representações múltiplas ajudou-os a desenvolverem a sua capacidade de converter informação de uma representação para outra. A valorização da representação pictórica revelou-se importante para que eles desenvolvessem as suas estratégias informais, com compreensão, na resolução de problemas. O facto de as frações terem sido trabalhadas em estreita ligação com as representações decimal e pictórica ajudou a promover a sua compreensão por parte dos alunos. O trabalho num plano secundário com as percentagens, em ligação com as representações em fração e decimal, revelou-se útil para o desenvolvimento da compreensão desta representação e da capacidade de converter representações.

O facto de se terem usado tarefas de natureza diversificada constituiu também uma opção apropriada. As tarefas exploratórias, em destaque nas fichas 1, 3, 4 e 5, ajudaram os alunos a desenvolver novos conceitos e uma compreensão mais aprofundada das diferentes representações. Os problemas ajudaram os alunos a compreender melhor o modo de usar os conceitos relativos aos números racionais numa diversidade de situações. Finalmente, os exercícios frequentes ajudaram à consolidação de conceitos e ao domínio das diferentes representações.

A valorização do significado parte-todo foi essencial para o desenvolvimento da sua compreensão por parte dos alunos, que não tinham estudado anteriormente este aspecto do número racional. A valorização do significado medida foi importante dado o foco na comparação e ordenação de números racionais. O uso dos restantes significados, embora de modo mais secundário, parece ter ajudado a uma melhor compreensão por parte dos alunos e o equilíbrio entre situações de natureza discreta e contínua pareceu adequado ao desenvolvimento da compreensão dos números racionais.

Os modos de trabalho usados nas aulas – introdução das tarefas com alguma discussão, trabalho em pares e discussões colectivas com síntese final – revelaram-se apropriados às características dos alunos e promotores da aprendizagem. É de notar que a planificação inicial envolvia maior ênfase no trabalho em grupo do que em pares, tendo este aspecto sido alterado na sequência da forma como correu a primeira aula.

No fim da unidade de ensino, os alunos revelam ainda algumas dificuldades e incompreensões, em especial quando intervêm frações impróprias. Os alunos mostram ainda dificuldade na compreensão da densidade dos números racionais, um ponto

reconhecidamente de difícil compreensão (Monteiro & Pinto, 2007). A questão que se põe é a de saber se estas questões devem ser trabalhadas mais intensamente nesta fase ou deixadas para mais tarde. Outros aspectos podem ser igualmente reponderados, no que respeita sobretudo ao momento em que se trabalham os vários tópicos: há vantagem em introduzir mais cedo a equivalência de frações (Post et al., 1985)? Que benefícios e que inconvenientes podem resultar da introdução mais cedo da recta numérica (Bright et al., 1998)? Será de dar maior importância já nesta fase ao significado razão (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007)?

Deste modo, a realização desta unidade de ensino traduz-se essencialmente em dois resultados: (i) por um lado, a evidência (qualitativa e quantitativa) que a unidade de ensino, com a orientação assumida, serviu de base a importantes aprendizagens dos alunos, sustentando globalmente a conjectura de ensino aprendizagem formulada; e (ii) por outro lado, a formulação de questões para investigação futura, que permitem construir alternativas tendo em vista ultrapassar os aspectos em que as aprendizagens dos alunos ficaram ainda aquém do esperado.

Referências

- Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215-232.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.
- Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343- 363.

- Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.
- Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavaro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.
- Howson, A. G., Keitel, C., & Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano*. Lisboa: DGIDC
- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. <http://sitio.dgic.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>
- Monteiro, C., Lobo, E., Veloso, G., Sousa, H., Moura, I., & Ribeiro, S. (2006). *Cadeia de tarefas para o ensino dos decimais*. Programa de Formação Contínua em Matemática para professores do 1.º ciclo, ESE de Lisboa.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-481.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Costa, F., Lopes, H., Moreirinha, O., & Salvado, D. (1997). *Histórias da aula de Matemática*. Lisboa: APM.
- Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-48.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.
- Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.
- Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Webb, D., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 110-113.

Anexo 1

Planificação da Unidade de Ensino²

Aulas previstas: 10 blocos de 90 minutos

Fichas de Trabalho/Testes	Tópicos	Objetivos/Capacidades a desenvolver	Natureza das tarefas	Representações	Significados	Grandezas	Modo de trabalho	Duração em min.
Teste de Diagnóstico	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	<ul style="list-style-type: none"> Diagnosticar o conhecimento dos alunos sobre antes da unidade de ensino. 	Problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal, fração, pictórica	Parte-todo, medida, quociente, operador e razão	Contínuas e discretas	Individual	45
Ficha de trabalho 1	Noção e representação de número racional.	<ul style="list-style-type: none"> Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas; Representar sob a forma de fração, numeral decimal e percentagem um número racional não negativo; Comparar números representados de diferentes formas; Identificar e dar exemplos de frações equivalentes; Compreender e usar um número racional na relação parte-todo, razão e medida. 	Tarefas de exploração	Percentagem, numeral decimal e fração	Parte-todo, medida e razão	Contínuas	Em grupo	90
Ficha de trabalho 2	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais.	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e usar um número racional como parte-todo, medida e operador; Comparar e ordenar números racionais representados na forma de numeral decimal; Reconstruir a unidade a partir das suas partes; Ler e escrever na representação decimal e relacionar diferentes representações de racionais não negativos. 	Exercícios (questões 1-4) e problemas (questões 5-8)	Percentagem, numeral decimal e fração	Parte-todo, medida e operador	Contínuas e discretas	Em pares	90+45
Ficha de trabalho 3	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais.	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e usar um número racional como parte-todo, operador e medida; Reconhecer frações que representam números maiores do que a unidade; Escrever frações impróprias na forma de numeral misto fracionário; Comparar números racionais; Reconstruir a unidade a partir das suas partes; Reconstruir as partes a partir da unidade; Compreender e utilizar um número racional nas representações: numeral decimal, numeral misto fracionário, percentagem e pictórica. 	Tarefas de exploração (questões 1, 2, 3, 5 e 6) e exercícios (questão 4)	Percentagem, numeral decimal, pictórica e numeral misto fracionário	Parte-todo, medida e operador	Contínuas e discretas	Em pares	45+90

² As fichas de trabalho 1, 3 e 7 contêm tarefas adaptadas da brochura para o 2.º ciclo elaborada a pedido da DGIDC (Menezes et al., 2008) para apoiar a aplicação do novo *Programa de Matemática* e a sua realização seguiu as recomendações sugeridas pelos autores. A ficha 2 é baseada na brochura *Cadeia de Decimais*, publicada pela ESE de Lisboa (Monteiro et al., 2006). As fichas 3, 4, 5 e 6 contêm tarefas adaptadas da brochura *Desenvolvendo o Sentido de Número Racional* (Monteiro & Pinto, 2007).

Ficha de trabalho 4	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e usar um número racional como quociente, operador e medida; Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; Reconstruir a unidade e as partes; Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade de medida; Comparar e ordenar números racionais representados de diferentes formas. 	Tarefas de exploração (questão 1), problemas (questão 2) e exercícios (questões 3-7)	Percentagem, numeral decimal, fração, pictórica	Quociente, operador e medida	Contínuas e discretas	Em pares	90+45
Ficha de trabalho 5	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes.	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e usar um número racional como relação parte-todo, medida, razão e operador; Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível; Reconstruir as partes Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade; Comparar números racionais apresentados sob a forma de fração; Compreender uma relação entre duas quantidades referentes a duas partes de um todo; Decomposição de frações. 	Tarefas de exploração (questões 1-4) e problemas (questões 5-9)	Fração	Parte-todo, medida, operador e razão	Contínuas e discretas	Em pares	45+90
Ficha de trabalho 6	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação de números racionais. Frações equivalentes	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e usar um número racional como medida e operador; Localizar e posicionar na reta numérica um número racional não negativo representado nas suas diferentes formas; Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível; Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; Reconstruir as partes; Comparar uma grandeza com outra tomada como unidade. 	Problemas (questões 1-2) e exercícios (questões 3-6)	Fração e decimal	Medida e operador	Contínuas	Em pares	90
Ficha de trabalho 7	Noção e representação de número racional. Percentagem	<ul style="list-style-type: none"> Compreender e utilizar um número racional nas representações: fração, numeral decimal e percentagem; Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração e escrever uma fração na sua forma irredutível; Recorrer a diferentes representações para representar um número racional; Traduzir uma fração por uma percentagem e interpretá-la como o número de partes em 100; Calcular e usar percentagens. 	Exercícios (questões 1-2) e problemas (questões 3-4)	Percentagem, numeral decimal e fração	Parte-todo e operador	Contínuas e discretas	Em pares	90
Avaliação de conhecimentos	Noção e representação de número racional. Comparação e ordenação. Frações equivalentes.	<ul style="list-style-type: none"> Avaliar as aprendizagens desenvolvidas durante a unidade de ensino. 	Problemas e exercícios	Percentagem, numeral decimal, fração, pictórica e verbal	Parte-todo, medida, quociente, operador e razão	Contínuas e discretas	Individual	45