

COMPREENSÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS, COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO: O CASO DE LEONOR¹

Marisa Quaresma

Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
marisa-quaresma@hotmail.com

João Pedro da Ponte

Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Este artigo tem como objectivo perceber de que modo o trabalho numa unidade de ensino com uma abordagem de cunho exploratório, em consonância com o novo programa de Matemática, que valoriza as diferentes representações de número racional, nos diferentes significados, pode contribuir para a compreensão, em alunos do 5.º ano, dos números racionais e das noções de ordenação e comparação. Segue uma abordagem qualitativa e interpretativa, com observação participante, fazendo o estudo de caso de uma aluna. A recolha de dados inclui duas entrevistas, produções escritas da aluna, registos vídeo e áudio de aulas e de entrevistas e diário de bordo. Os resultados mostram que a aluna melhorou a sua compreensão dos números racionais e das suas representações, revelando-se competente e flexível na escolha das representações e das estratégias mais adequadas a cada situação ou problema. Também melhorou bastante na sua compreensão da comparação e ordenação dos números racionais, utilizando, sobretudo, a representação decimal, o que possivelmente se deve ao trabalho desenvolvido durante a unidade de ensino, dado que os alunos puderam utilizar diversas representações. O estudo sugere, por isso, que existe vantagem em trabalhar de forma integrada as várias representações de

¹ Trabalho realizado no âmbito do Projecto *IMLNA – Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra*, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CED/65448/2006). Este projeto, que decorreu de 2008 a 2011, procurava contribuir para a maior compreensão das razões que levam os alunos portugueses a um fraco desempenho em Números (em especial, os números racionais no 2.º ciclo) e em Álgebra (do 1.º ciclo ao ensino secundário) e de quais as estratégias a usar para os ajudar a ultrapassar as suas dificuldades.



número racional nos diferentes significados.

Palavras-chave: Números racionais; Representações; Comparação; Ordenação; Aprendizagem.

Abstract

This article aims to understand how the work in a teaching unit following an exploratory approach, aligned with the new mathematics curriculum, which values different representations of rational numbers in different meanings, may contribute to grade 5 students' understanding of rational numbers and of the notions of order and comparison. It follows a qualitative and interpretative approach, using participant observation and making the case study of a student. Data collection includes two interviews, the student's written productions, video and audio records of classes and of interviews and a researcher's journal. The results show that the student improved her understanding of rational numbers and their representations, showing that she is competent and flexible in the selection of representations and strategies best suited to each situation or problem. She also vastly improved her understanding of ordering and comparing rational numbers, mainly using the decimal representation, which may be due to the work done during the teaching unit, as students were able to use many different representations. Therefore, the study suggests that there are advantages in working in an integrated manner the various representations of rational numbers in different meanings.

Keywords: Rational numbers; Representations; Comparing; Ordering; Learning.

Introdução

O conceito de número racional é um dos mais importantes e complexos que os alunos aprendem nos primeiros anos de escolaridade. No entanto, no 2.º ciclo, constitui um conceito onde os alunos apresentam muitas dificuldades (Lamon, 2007). Na verdade, o número racional admite várias representações, nomeadamente, decimal, fracção, pictórica e percentagem. Muitas vezes, os alunos só têm contacto com as fracções e percentagens no 2.º ciclo, onde surgem descontextualizadas, como

um assunto novo e à parte dos restantes. Têm então de aprender rapidamente a operar com estas representações, que não chegam a ser devidamente trabalhadas. Isso implica que os alunos têm que compreender as novas representações dos números racionais e, ao mesmo tempo, tornar-se capazes de operar e resolver problemas com eles. Ou seja, exigimos um grande número de destrezas e conhecimentos aos alunos num curto espaço de tempo, o que leva a que eles não aprendam com compreensão os números racionais e tenham muitas dificuldades na resolução de problemas que envolvam estes números.

Em Portugal, o novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007) dá indicações claras que o estudo das diferentes representações dos números racionais se deve iniciar logo no 1.º ciclo. As orientações curriculares do novo programa indicam que as representações decimal e em fracção surgem agora lado a lado e, já no 3.º e 4.º ano, os alunos devem trabalhar com estas representações, relacionando-as entre si. A comparação e a ordenação recebem também atenção no 1.º ciclo, sugerindo o programa o uso de valores de referência como 0,5; $\frac{1}{2}$; e 50%.

Este artigo analisa de que modo uma unidade de ensino que promove o trabalho com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, com diferentes tipos de unidades e com tarefas de natureza diversificada, pode contribuir para a compreensão dos números racionais e da comparação e ordenação de números racionais em alunos do 5.º ano.

Números Racionais: Conceito, Representação, Comparação e Ordenação

Conceito de número racional

Como indicam Post, Behr e Lesh (1986), inúmeros estudos mostram que os alunos têm dificuldades significativas na aprendizagem dos números racionais. Segundo estes autores “parece que muitos alunos não têm um conceito funcional interno de número racional” (p. 2). E acrescentam que parece faltar-lhes a noção quantitativa de número racional, incluindo a percepção de que os números racionais são números e a compreensão que os números racionais podem ser representados de várias formas – numerais decimais, fracções, percentagens, pontos de uma recta numérica, pictórica e verbalmente.

O conceito de número racional é multifacetado, apresentando cinco significados diferentes. Charalambous e Pitta-Pantazi (2007) sistematizam estes significados do



seguinte modo: (i) *parte-todo* – caso em que existe uma comparação entre a parte de um todo contínuo ou discreto, ou seja, o número racional representa a relação entre o numerador que indica o número de partes que se tomam do todo e o denominador que é o número de partes em que o todo está dividido, a compreensão deste significado é fundamental para a compreensão dos restantes significados; (ii) *razão* – designa uma comparação entre duas quantidades da mesma natureza ou de natureza distinta; (iii) *operador* – transforma o cardinal de um conjunto discreto, pode ser partitivo (no caso da fracção $\frac{1}{b}$) ou multiplicativo partitivo (no caso da fracção $\frac{a}{b}$, com $a \neq 0$); (iv) *quociente* – um número racional visto como resultado de uma divisão entre dois números naturais, onde o numerador e o denominador representam o todo; e (v) *medida* – situação que se traduz na comparação entre duas grandezas, em que uma delas é considerada a unidade.

Representações dos números racionais

De acordo com Goldin (2003), uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa. Representar um número significa atribuir-lhe uma designação, devendo os alunos compreender que um número pode ter várias designações. A percentagem, o número decimal, a fracção, linguagem natural e pictórica são representações que um número racional pode tomar e que os alunos devem compreender de forma a desenvolverem a sua capacidade de raciocínio. Deste modo, os alunos podem chegar, de forma espontânea, à equivalência de fracções e decimais. Segundo o NCTM (2007):

“Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. [...] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros”. (p. 240)

Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) indicam que os resultados de estudos desenvolvidos pelo *Rational Number Project* sugerem que a compreensão de número racional está relacionada com três características do pensamento dos alunos: (i) a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de número racional; (ii) flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) a independência

cada vez maior das representações concretas. Defendem ainda que os alunos que têm pouca experiência na utilização e na conversão entre as diferentes representações de número racional têm grandes dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

No *Rational Number Project* foi desenvolvido um modelo de ensino baseado na conversão dentro e entre representações. Este modelo salienta que a compreensão se reflete na capacidade de representar as ideias matemáticas de várias maneiras e na habilidade para fazer conexões entre as diferentes representações e salienta ainda que as conversões entre e dentro das diferentes representações são muito significativas para os alunos. O modelo indica que o desenvolvimento da compreensão profunda de ideias matemáticas exige experiência em diferentes representações e experiência nas conversões dentro e entre representações já que as conversões exigem uma reinterpretação de ideias e conceitos. É através desse processo de reinterpretação que os alunos adquirem novos conhecimentos e reforçam os conhecimentos anteriores, o que, para Lesh, Post e Behr (1987), resulta numa compreensão mais ampla e profunda das ideias matemáticas.

Webb, Boswinkel e Dekker (2008) apresentam um modelo para ajudar os professores a pensarem sobre os processos de aprendizagem e as estratégias utilizadas pelos alunos. Segundo estes autores, o grande desafio do ensino desta disciplina é encontrar formas de promover a compreensão dos alunos da Matemática porque, ao contrário do que se pensava anteriormente, o ensino não pode ser baseado nos processos, mas sim na compreensão de conceitos. Apresentam assim o modelo do “icebergue de representações” como uma metáfora para ilustrar como os alunos precisam de uma ampla experiência com diferentes representações para num momento posterior construírem um sentido formal para as representações matemáticas. Este modelo consiste numa pequena parte “fora de água” (a ponta do icebergue) e numa grande parte “debaixo de água” (a capacidade flutuante), onde residem as representações informais e preformais. A ponta do icebergue indica a representação simbólica ou o procedimento formal. Este modelo distingue representações informais, preformais e formais e sugere que os professores devem dedicar mais tempo à construção das representações informais e preformais.

Para Monteiro e Pinto (2007), algumas das dificuldades mais comuns na representação dos números racionais na forma de fracção são:



- *“Na compreensão dos números $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ os alunos referem que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{4}{3}$, precisamente porque 4 é maior que 3. Este erro é muito vulgar e é um indicador de que a representação fraccionária ainda não está compreendida.*
- *$\frac{3}{2} = 1,2$. Mais uma vez as representações não estão relacionadas com os números que representam”.* (p. 12)

As autoras consideram que estes erros mostram que os alunos não entenderam o sistema de numeração decimal e que não ligam as representações com as quantidades a que dizem respeito.

Monteiro e Pinto (2007) apresentam também algumas dificuldades que os alunos revelam com os números decimais: “(i) confusão entre décimas e centésimas, por exemplo confundem 2,5 com 2,05; (ii) confundirem o número de algarismos com a quantidade, quando, por exemplo, confundem que 1,456 é maior que 1,5, (iii) e acharem que entre 0,1 e 0,2 não existem números racionais” (p. 11).

A representação em percentagem de número racional, apesar de ser trabalhada formalmente na escola apenas a partir do 2.º ciclo, faz parte do quotidiano dos alunos. Num estudo realizado por Moss (2002) os alunos revelam uma boa compreensão qualitativa do “significado” de diferentes valores numéricos representados sob a forma de percentagem. No entanto, Parker e Leinhardt (1995), na sua revisão sobre a aprendizagem das percentagens, indicam que os alunos têm sérias dificuldades nesta representação: (i) na compreensão do símbolo %, a que por vezes não atribuem significado, colocando-o em qualquer lugar e não fazendo distinção entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}\%$, (ii) na utilização incorrecta da “regra do numerador”, acreditando que o símbolo da percentagem à direita do número pode ser substituído por uma vírgula à esquerda do número (e transformando, por exemplo, 8% em 0,8), (iii) na procura da percentagem (por exemplo escrevendo $60 = 50\%$ de 30), e (iv) no cálculo de percentagens maiores que 100.

De acordo com Cox (1999), pode afirmar-se que as representações pictóricas são instrumentos de ajuda úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação do problema e também facilitar a mudança de estratégias de resolução. O autor estudou as representações usadas na resolução de problemas, e concluiu que os alunos têm diferentes formas de exteriorizar o seu raciocínio. Alguns alunos produzem representações parciais, as quais parecem funcionar principalmente como

ajuda de memória; outros alunos constroem representações bastante compreensíveis e parecem comprometer-se com o modelo de raciocínio no qual elas tinham uma função central. O autor sugere que os alunos precisam ter habilidade para interpretar representações, construir as suas próprias representações e desenvolver e comunicar as suas ideias.

Em relação à representação geométrica, Monteiro e Pinto (2007) referem que a recta numérica é um recurso didático importante, na medida em que permite evidenciar a densidade dos números racionais e as relações de grandeza. Para Bright, Behr, Post e Wachsmuth (1988) a recta numérica difere dos outros modelos em vários pontos importantes. Primeiro, um comprimento representa a unidade, e sugere não só a iteração da unidade, mas também subdivisões simultâneas de todas as unidades iteradas, ou seja pode ser tratada como uma régua. Em segundo lugar, na recta numérica não existe separação visual entre as unidades consecutivas, o modelo é totalmente contínuo. Estes autores referem um estudo feito com alunos do 7.º ano de escolaridade, onde era pedido aos alunos que representassem algumas fracções na recta numérica. Os resultados indicam que os alunos têm dificuldade em marcar fracções na recta numérica quando o número de partições da recta é diferente do denominador das fracções, mesmo quando o número de partes é um múltiplo ou um submúltiplo do denominador. Estes resultados sugerem assim uma noção imprecisa e inflexível da fracção.

No que diz respeito à representação verbal, Streefland (1991) menciona que é importante que as fracções sejam trabalhadas a partir dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Geralmente, os alunos começam por resolver questões usando uma mistura de representações verbais e pictóricas (desenhos ou esquemas). Estes esquemas servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respectiva solução.

Comparação e ordenação de números racionais

Os números racionais são o primeiro conjunto numérico que os alunos aprendem que não se baseia no processo de contagem (Godino, Ruiz, Roa, Cid, Batanero & Font, 2004). Até este momento, contando de uma forma ou de outra (para a frente ou para trás, com saltos ou não), os alunos podiam resolver a grande maioria dos problemas que lhes eram apresentados. No entanto, com a introdução dos números racionais o processo de contagem já não pode ser a base do raciocínio.



Assim, a prática e o discurso que se iniciam com os números racionais implicam um salto importante na forma de pensar e de usar os números, o que origina muitas dificuldades aos alunos.

Antes de aprenderem os números racionais os alunos já conhecem os números naturais. Segundo Post et al. (1986) há, inevitavelmente, uma influência inicial dos conhecimentos sobre números naturais no modo como os alunos começam a pensar a ordenação dos números racionais, e em alguns casos essa influência é persistente. Isso, por vezes, afecta negativamente a sua capacidade de compreender as relações de ordem dos números racionais. No conjunto dos números naturais, os alunos podem pensar de duas maneiras diferentes: podem comparar a “grandeza” de dois números pela correspondência com elementos de dois conjuntos finitos que representam os mesmos números. Desta forma, é salientado o aspecto cardinal do número. Ou então, os alunos podem comparar dois números naturais com a sequência de contagem, considerando que o maior número vem depois. Aqui salienta-se o aspecto ordinal.

Nos números racionais não existe uma relação ordinal óbvia que permita ordená-los de forma simples. Contudo, os símbolos envolvidos em $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ sugerem uma possível relação que os alunos podem supor incorretamente estar presente. De facto são necessárias diferentes estratégias para ordenar $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{1}{9}$, por exemplo. Segundo Post et al. (1986) devem ser encontradas formas de ajudar os alunos a lidar com esta questão, sugerindo que devem ser desenvolvidas estratégias que os ajudem a colmatar a lacuna conceptual entre as estruturas aditivas e multiplicativas pois, alguns reflexos dos números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Num patamar mais avançado, Post et al. (1986) apontam que a noção quantitativa de número racional dos alunos deve incluir a compreensão de que os números racionais têm tamanhos relativos e absolutos, e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo. Assim, a magnitude relativa de um par de números racionais pode ser avaliada apenas quando relacionados com a unidade de que deriva o seu significado. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta pode ser inferior a $\frac{1}{3}$ de uma torta grande. Enquanto isso, a ordenação de valores absolutos existe dentro de um conjunto de números racionais relacionados com uma unidade comum. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ é sempre inferior a $\frac{1}{2}$, se ambos se referem ao mesmo todo. E,

como elementos do sistema matemático, $\frac{1}{3}$ é inferior a $\frac{1}{2}$, por exemplo, porque a unidade de comparação é 1. Finalmente, os autores referem que a compreensão de que a relação entre o numerador e o denominador define o significado de uma fracção, e não as respectivas magnitudes absolutas quando vistas de forma independente. Assim, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, embora os dígitos que surgem em $\frac{1}{2}$ sejam menores do que os seus correspondentes em $\frac{1}{3}$.

Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985) referem que a ordenação de fracções exige os seguintes conhecimentos complexos: (i) o tamanho da fracção depende da relação entre os dois números naturais operada pelo símbolo de fracção; (ii) existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o tamanho de cada parte e (iii) quando as fracções têm o mesmo denominador há uma relação direta entre o número de partes que se tomam e o tamanho da fracção.

Post et al. (1986) referem que os alunos usam diversas estratégias espontâneas informais na resolução de tarefas de comparação de fracções. Uma dessas estratégias é o *pensamento residual* que, segundo os autores se refere à quantidade necessária para construir o todo. Assim, na comparação entre $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$, os alunos podem perceber que no primeiro falta $\frac{1}{4}$ para completar o todo (o valor residual) enquanto no segundo só falta $\frac{1}{8}$ e concluir então que $\frac{7}{8} > \frac{3}{4}$. Outra estratégia é *utilização de pontos de referência*, que envolve a comparação de duas fracções utilizando uma terceira como referência, muitas vezes $\frac{1}{2}$ e às vezes 1. Por exemplo, um aluno que utiliza esta estratégia diz que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, porque a primeira fracção é maior do que a metade e a segunda é menor que a metade. Outra estratégia, ainda, é o *pensamento diferencial*. Alguns alunos afirmam que $\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque ambos exigem apenas uma parte para formar o todo. Neste caso os alunos focam-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, mas não consideram o tamanho real da fracção. Esta é uma forma de pensar característica dos números naturais que conduz geralmente a resultados incorretos. Assim, os alunos que usam pensamento residual e pontos de referência são geralmente melhor sucedidos do que os que usam pensamento diferencial.

Post et al. (1993) referem que a influência das concepções sobre números



naturais também se verifica na ordenação de números racionais na representação de numeral decimal. Muitos alunos apresentam dificuldade na ordenação de numerais decimais constituídos por um número diferente de casas decimais, sendo um erro comum afirmarem que 0,39 é maior do que 0,4 porque 39 é maior do que 4.

Orton, Post, Behr, Cramer, Harel, e Lesh (1995) indicam que uma estratégia possível para comparar duas fracções é encontrar fracções equivalentes com denominadores comuns, por exemplo, para comparar $\frac{2}{3}$ e $\frac{7}{18}$ pode encontrar-se fracções equivalentes às dadas com denominador 90, $\frac{36}{90}$ e $\frac{35}{90}$, e assim, verificamos que $\frac{2}{3}$ é maior. Contudo, os autores referem também que este procedimento, geralmente, não é muito significativo para os alunos do 5.º ano.

Metodologia de Investigação

Dada a natureza do estudo, centrado na compreensão por parte dos alunos de conceitos relacionados com os números racionais, a metodologia adoptada segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). Trata-se de uma investigação que incide sobre a prática profissional da primeira autora, que atuou simultaneamente como professora e como investigadora.

Este estudo foi desenvolvido numa turma do 5.º ano de escolaridade composta por 22 alunos (9 raparigas e 13 rapazes), com idades entre os 10 e os 12 anos. É uma turma que revela falta de hábitos e métodos de trabalho, nomeadamente de trabalho em pares. É receptiva a novos tipos de tarefa e mantém um ritmo de trabalho equilibrado. A primeira autora é a sua professora de Matemática e também a diretora de turma e professora de Ciências da Natureza, Estudo Acompanhado e Formação Cívica, estando assim com os alunos 11 tempos (de 45 minutos) por semana.

Dado o nosso interesse em analisar em profundidade a compreensão dos alunos num campo manifestamente complexo mas sobre o qual ainda se sabe relativamente pouco – a aprendizagem dos números racionais numa abordagem exploratória – realizámos diversos estudos de caso de cunho exploratório (Merriam, 1988; Ponte, 2006). Neste artigo, por limitações de espaço, apresentamos apenas o caso de Leonor, uma aluna com bom desempenho na disciplina de Matemática, que mostra ter bom raciocínio, usa diversas estratégias na resolução de problemas e tem boa capacidade de comunicação oral e escrita. Revela também bom desempenho no

cálculo mental, usando com destreza as propriedades das operações e as relações entre números e, além disso, é muito participativa. Leonor mostrou-se muito entusiasmada com o estudo dos números racionais porque gosta de novos desafios. Geralmente, é das primeiras alunas a terminar as tarefas e tenta sempre participar, mas não fica aborrecida quando são solicitados outros colegas. Atendendo a todas estas características, é uma aluna cujo desempenho nos pareceu interessante estudar.

A recolha de dados usou diversas técnicas usuais na investigação qualitativa, com relevo para a entrevista, registo vídeo/áudio e recolha documental (Patton, 1987). Assim, neste estudo são utilizadas duas entrevistas, uma antes e outra depois da unidade de ensino, ambas com a duração aproximada de uma hora, em que se pediu à aluna para resolver tarefas matemáticas tendo em vista recolher elementos sobre estratégias que usa bem como as suas dificuldades na resolução de problemas e, de modo mais específico, averiguar a sua capacidade para: (i) lidar com o conceito de número racional; (ii) trabalhar com números racionais nas suas múltiplas representações; (iii) construir a parte, reconstruir a unidade e manipular diferentes tipos de unidade; (iv) resolver problemas envolvendo os vários significados dos números racionais. Todas as aulas da experiência de ensino e as entrevistas foram registadas em vídeo e áudio. Foram também recolhidos e analisados os trabalhos escritos realizados na aula pela aluna nas diversas tarefas. Além disso, como registo de observação, foram feitas anotações num diário de bordo sobre o modo como decorreram as aulas.

Devido à natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo. Procedeu-se à transcrição integral das gravações vídeo das entrevistas, procurando construir uma categorização que permitisse responder às questões do estudo. Tendo em conta a revisão da literatura e os objectivos do estudo foram consideradas as seguintes categorias de análise: (i) dificuldades e erros mais significativos em várias representações de número racional (decimal, pictórica, fracção e percentagem); e (ii) estratégias e dificuldades na comparação e ordenação de números racionais.

Experiência de Ensino

A experiência de ensino teve como hipótese geral de ensino-aprendizagem a conjectura que os alunos desenvolvem melhor a sua compreensão e o seu sentido de



número racional ao trabalharem simultaneamente as várias representações, nos diferentes significados de número racional, com diferentes tipos de grandezas e em tarefas de natureza diversificada.

Antes da elaboração da unidade de ensino foi realizada uma aula de diagnóstico para aferir os conhecimentos dos alunos sobre os números racionais. Esta aula decorreu num bloco de 90 minutos, tendo sido propostas tarefas sobre a noção, ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções, envolvendo diferentes representações de número racional. Apesar de os alunos não terem qualquer conhecimento formal sobre as questões propostas, mostraram-se empenhados participativos e esforçaram-se por encontrar estratégias que lhes permitissem resolver as tarefas. Mostraram dificuldade na linguagem própria das fracções, dizendo por exemplo “segunda parte” para se referirem a um meio, ou “terceira parte” para se referirem a um terço. Mostraram bom desempenho na utilização de fracções unitárias como operadores, possivelmente trabalhados durante o 1.º ciclo. Contudo, este conhecimento remete para a ideia de divisão cujo divisor é o denominador da fracção unitária. Além disso, mostraram algumas dificuldades na compreensão de números decimais. Deste modo, considerou-se prioritário clarificar os aspectos essenciais do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, para poder servir de base a uma compreensão mais sólida e completa dos números racionais.

A elaboração da unidade de ensino teve em atenção o conhecimento que a professora detinha da turma e, em particular, este diagnóstico. Além disso, tendo por base as orientações curriculares para o ensino deste tópico, nomeadamente as do novo programa de Matemática (ME, 2007) e a revisão da literatura, considerámos que a estratégia a seguir deveria: (i) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, medida, quociente, operador e razão); (ii) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional (decimal, fracção, pictórica, percentagem e verbal); (iii) contemplar diferentes tipos de unidades e a respetiva construção; (iv) tratar a ordenação, comparação e equivalência de fracções antes das operações com fracções; e (v) reforçar as relações entre conceitos e procedimentos.

A unidade de ensino tem subjacente um percurso de ensino-aprendizagem constituído por sete fichas de trabalho organizadas a pensar nas ideias e processos matemáticos que se pretende que os alunos desenvolvam. Numa primeira etapa,



começa-se por introduzir as diferentes representações de número racional, evidenciando as relações existentes entre elas, bem como as respectivas conversões. De seguida, propõem-se tarefas na representação decimal nos diversos significados, para relembrar conceitos já trabalhados nesta representação no 1.º ciclo, como a comparação e ordenação, onde os alunos mostraram dificuldade no diagnóstico. Posteriormente, introduzem-se as fracções impróprias e os numerais mistos fraccionários, como uma nova forma de representar números racionais, também nos diferentes significados. Nesta altura trabalha-se também a construção de partes e a reconstrução da unidade na representação fraccionária (usando fracções próprias e impróprias) e a percentagem, utilizando a representação pictórica como apoio para que os alunos possam visualizar as transformações realizadas. Esta abordagem inicial tem como principal objectivo desenvolver nos alunos a noção de número racional e a consciência de que estes números podem ser representados de diferentes formas e permitir-lhes ganhar flexibilidade nas conversões entre e dentro dessas representações.

Numa segunda etapa são realizadas tarefas envolvendo partilha equitativa, são retomados os conceitos de comparação e ordenação de números racionais, agora envolvendo também a representação em forma de fracção e a equivalência de fracções. A comparação de fracções é um tópico onde os alunos mostram muitas dificuldades, sendo por isso introduzida pela comparação entre pares de fracções com numeradores iguais e com denominadores iguais. Pelo seu lado, a ordenação é realizada principalmente a partir de números representados em fracção, decimal e percentagem. Primeiro foram apresentadas as fracções básicas que os alunos facilmente relacionam com as outras representações. Seguidamente, foram abordadas as fracções equivalentes e, a partir destas, foi estudada a densidade dos números racionais. Para diversificar as estratégias de ordenação e comparação de números racionais, foi introduzida a recta numérica, uma poderosa ferramenta para a compreensão das relações de ordem nos números racionais. Finalmente, a unidade de ensino aborda ainda a percentagem como operador.

Todas as tarefas propostas na unidade de ensino têm uma característica comum – usar representações e significados diferentes, para que os alunos adquiram flexibilidade na conversão e nas relações entre as várias representações e para trabalharem os diversos significados de número racional de forma integrada. Além disso, dá-se ênfase à diversidade de tarefas, propondo problemas, explorações e exercícios. De acordo com os tópicos abordados, os significados que recebem maior



atenção são parte-todo e medida, depois quociente e operador e, por último, razão.

A realização das tarefas envolve as três fases descritas por Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998): (i) a apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam; (ii) o desenvolvimento do trabalho pelos alunos; e (iii) a discussão/reflexão final. A atividade realizada na sala de aula envolve diferentes formas de trabalho. Privilegia-se o trabalho em grupo e a pares como forma de proporcionar aos alunos um ambiente estimulante de partilha e colaboração, mas também são contemplados momentos de trabalho individual. Tal como indica Ponte (2005), procura-se que os momentos de discussão colectiva constituam, oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento. Deste modo, diversas formas de diálogo na sala de aula e de interação social são utilizados para promover o reconhecimento de conexões entre ideias e a reorganização do conhecimento (NCTM, 2007). Nesta unidade de ensino são valorizadas as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, privilegiam-se os processos informais e as representações que eles já conhecem para a partir daí introduzir, gradualmente, novas representações formais de número racional. Contudo, a introdução de novas representações, não significa que se deixem de usar as anteriores – pelo contrário, os alunos devem adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Os problemas propostos têm, tanto quanto possível, contextos significativos “para ajudar os alunos a ultrapassar o fosso entre o seu conhecimento pessoal e o conhecimento formal da Matemática” (Gravemeijer, 2005, p. 83). Procura-se que possam construir um novo conhecimento matemático com significado, a partir do que já sabem.

Compreensão Inicial dos Números Racionais

Começamos por observar o modo como Leonor resolveu diversas tarefas na entrevista realizada antes da unidade de ensino, analisando o que isso nos indica sobre a sua compreensão dos números racionais e da sua ordenação e comparação.

A questão a) da tarefa 1 pede para ordenar três fracções com o mesmo denominador numa situação contextualizada e no significado parte-todo. A informação é dada em fracção e a resposta pode ser dada em qualquer representação de número racional.

Tarefa 1. O Filipe, o Bernardo e a Inês foram participar no campeonato de natação. Ao fim de alguns minutos, o irmão do Filipe fez o ponto da situação:

- O Filipe já percorreu $\frac{1}{4}$ do percurso;
- O Bernardo $\frac{3}{4}$;
- E a Inês $\frac{3}{4}$.

- a) Indica qual dos amigos vai em primeiro lugar. E em segundo?
b) Indica a distância entre o Filipe e o Bernardo.

Leonor começa por imaginar um percurso total repartido em 6 etapas, o que significa que consegue interpretar o denominador como o número total de partes em que o todo está dividido e depois compara apenas os numeradores tomando-os como as partes do total que cada um já tinha percorrido:

Leonor: Quem vai em primeiro é o Filipe porque já percorreu mais do que o Bernardo e do que a Inês. Quem vai em segundo é... Não quem vai em primeiro é a Inês, quem vai em segundo é o Filipe.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui são 6 e ela já percorreu 5, aqui são 6 e ele já percorreu 4. Então quem já percorreu mais foi a Inês e a seguir o Filipe. (e escreve a resposta)

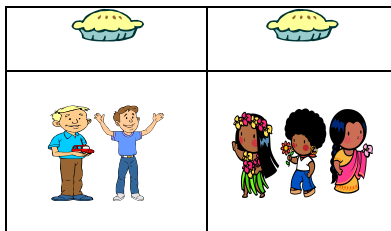
Como se verifica neste diálogo, para decidir quem vai em primeiro, Leonor compara os numeradores, dizendo que são 6 as etapas e que eles já percorreram 5 e 4 respectivamente. Apesar de ainda não ter estudado formalmente a ordenação de fracções, usa uma estratégia adequada para comparar fracções com o mesmo denominador, comparando os respectivos numeradores.

A questão b) pede para comparar duas fracções com o mesmo denominador (indicando a diferença entre elas). Já na questão anterior Leonor tinha imaginado um percurso com 6 etapas e consegue comparar com facilidade as fracções indicadas. Utiliza o processo de construção de fracções onde se sente confiante, em que o denominador é o número total de partes do todo e o numerador representa as partes que se tomam do todo. Contudo, mostra alguma dificuldade inicial na representação da distância sob a forma de fracção, que são ultrapassadas com a pergunta da professora. A aluna apresenta apenas a resposta em fracção e em nenhum momento mostra usar outra representação, o que se pode dever ao facto de os dados serem apresentados em fracção.



As questões a) e c) da tarefa 2 pedem para partilhar duas tartes iguais de duas maneiras diferentes, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, e comparar em que situação as fatias são maiores. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado quociente. A informação surge na representação pictórica e não é dada qualquer informação sobre a representação a usar na resposta.

Tarefa 2. As meninas dividem uma tarte e os meninos também dividem uma tarte igual à das meninas.



- a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?
- b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?
- c) Quem é que come mais? Cada menino ou cada menina?

Leonor mostra-se à vontade a lidar com as fracções unitárias (alínea a) escrevendo na ficha “Não. Porque as meninas são mais que os rapazes”. Resolve esta questão usando um raciocínio do dia-a-dia. Percebe que as fatias da tarte ficam maiores se esta for partilhada por 2 pessoas, em vez de 3. Na questão c) explica por um raciocínio análogo que $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{1}{3}$, mostrando perceber que à medida que aumentamos o número de partes em que partimos o todo, as partes ficam menores. Evidencia assim compreender a relação inversa entre numerador e denominador.

Pelo seu lado, a questão b) pede para representar em forma de fracção a parte da tarte que cabe a cada menino e a cada menina. Trata-se de uma situação contextualizada, com uma quantidade contínua no significado quociente, sendo a informação dada na representação pictórica e a resposta pedida em fracção.

Leonor revela muitas dificuldades no uso da linguagem verbal das fracções, lendo a sua resposta do seguinte modo: “As meninas vão comer um de três e os meninos vão comer um de dois.” A aluna não diz “um terço” e “um meio” mas sim “um de três” e “um de dois”. Aparentemente, não conhece os termos “um terço” e “um meio”. No entanto, evidencia confiança na representação escrita da fracção, mostrando compreender o significado do numerador e do denominador. Escreve a

seguinte resposta:

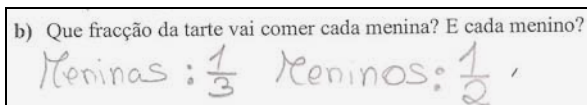


Fig. 1 – Resposta de Leonor, E1-T2b)².

Tarefa 3. Ordena os seguintes números por ordem crescente

a) 0,5; 2,29; 0,45; 5,02; 2,200

b) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$

As questões da tarefa 3 envolvem a ordenação de números racionais na representação decimal e fraccionária, respectivamente. Trata-se de uma tarefa colocada num contexto puramente matemático, no significado medida.

Na questão a), Leonor começa por mostrar bastante à vontade na comparação dos dois números mais pequenos:

Leonor: O maior... É crescente... O mais pequeno... É o 0,45.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque se nós acrescentarmos mais um zero, fica 0,450 e este não, (este) fica 0,500... A seguir é o 0,5... Depois é o 2,29... Depois é o 2,200...

Contudo, mostra alguma confusão com os números 2,29 e 2,200. Começa por dizer que 2,200 é maior revelando alguma confusão entre 200 milésimas e 29 centésimas. Mas quando lhe peço que explique como está a pensar, a aluna consegue autocorrigir-se percebendo que o maior número é 2,29 e não 2,200:

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui já estão os 2 zeros e aqui se acrescentar um zero aqui fica 290 e aqui está só 200

Professora: Então qual é o maior desses dois números?

Leonor: O maior destes dois números é este (2,29), não é este (2,200)... Tenho que trocar isto!

Professora: Não sei... Tens?

Leonor: Sim, porque o mais pequeno destes dois é este (2,200)... E depois é o 5,02.

² E1-T2b significa Entrevista 1, Tarefa 2 alínea b. Este código é usado daqui em diante.



Como estratégia para ordenar os números na representação decimal Leonor completa os números com zeros à direita até às milésimas e depois compara os números com a mesma quantidade de casas decimais. Parece já ter adquirido o processo mas por vezes ainda se confunde.

A questão b) revela-se um problema difícil para a aluna já que esta não consegue fazer uma leitura correta de números expressos nesta representação. Começa por dizer que a maior fracção é $\frac{1}{2}$ porque se fosse, por exemplo, um bolo isso significava que comeria a metade e, segundo ela, metade “é muito”. Em contrapartida, $\frac{7}{8}$ não é tanto porque está “partido” em 8 partes. Ou seja, aparentemente, compara apenas o tamanho de uma fatia em cada caso e não toma em consideração o facto de serem tomadas 7 fatias, como se pode verificar no seguinte diálogo:

Professora: Qual é que é o mais pequenino?

Leonor: É o 7 por 8.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque aqui no um por 2, só temos 2 é a metade e aqui temos a quarta parte e aqui temos a oitava parte... Temos a sétima parte só temos que dividir... Por 8, são 8 fatias e ele só come 7.

Leonor considera que $\frac{1}{2}$ é maior porque é uma fatia grande, enquanto aquilo que chama a “oitava parte” é mais pequeno. Na forma como faz a leitura da fracção percebe-se que compara apenas a fracção unitária em cada situação e não toma em consideração o numerador, ou seja, o número de partes do todo que se toma.

Trabalho com Números Racionais durante a Unidade de Ensino

Tal como acontece na maioria das disciplinas, durante a unidade de ensino, Leonor é bastante participativa. Colabora nas discussões, atenta ao que os outros apresentam, mas mostrando sempre sentido crítico. Tenta compreender as resoluções dos colegas e quando não está de acordo intervém de modo a clarificar as situações. Quando tem uma resolução ou estratégia diferente das apresentadas, pede sempre para apresentar a sua. Mostra-se muito empenhada, tanto na realização das tarefas, como na sua discussão. Durante a unidade de ensino, na maioria das aulas, trabalha com a colega Amélia, que, tal como ela, é uma aluna com um bom aproveitamento,

mas com um raciocínio lógico-abstrato menos desenvolvido. De seguida apresentamos algumas situações vividas durante estas aulas e que nos parecem significativas no seu percurso pelo seu potencial contributo na evolução da sua compreensão de número racional, das suas diferentes representações e da comparação e ordenação de números racionais.

Tarefa 1. Partilhando pizzas (Monteiro & Pinto, 2007)

Questão 1

- 1.1. Quatro amigos foram a um restaurante e pediram três pizzas. Dividiram igualmente as três pizzas. Que parte da pizza comeu cada amigo?
- 1.2. Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma pizza? Explica o teu raciocínio.

Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais pizza? Explica o teu raciocínio.

Questão 1. Esta questão é uma exploração que envolve o significado quociente, numa situação contextualizada e envolve grandezas contínuas. É pedido aos alunos que partilhem equitativamente 3 pizzas por 4 amigos e que depois comparem a quantidade que cabe a cada amigo com a unidade. A informação é dada verbalmente e não são dadas informações sobre a representação a utilizar nas respostas.

Leonor e Amélia recorrem à representação pictórica para representar a parte que cabe a cada amigo:

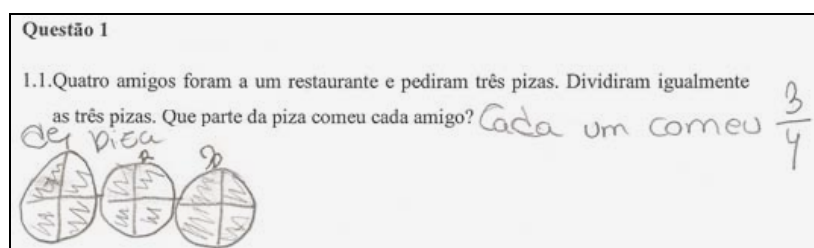


Fig. 2 – Resposta de Leonor e Amélia, FT4-T1.Q1.1.³

Mais tarde, na discussão colectiva da tarefa as alunas referem que contaram as fatias a partir da imagem:

³ FT4-T1.Q1.1 significa Ficha de Trabalho 4, Tarefa 1, Questão 1.1. Este código é usado daqui em diante.



Leonor: Nós contámos logo. Três do A, três do B... Cada um comia 3 partes, então comia $\frac{3}{4}$.

Professora: Então compreenderam logo que cada fatia correspondia ao tamanho...

Turma: Um quarto.

Amélia: Oh professora, mas se cada um comia 3 partes era logo $\frac{3}{4}$.

Numa questão mais simples da primeira entrevista, Leonor já tinha conseguido representar através de uma fracção unitária a parte de uma tarte que caberia a cada um de três meninos, mas em situações mais complicadas precisa de se apoiar na representação pictórica para determinar a parte que cabe a cada amigo.

Quando solicitadas a comparar a fracção $\frac{3}{4}$ com a unidade, Leonor e Amélia começam por determinar a fracção que representa a unidade:

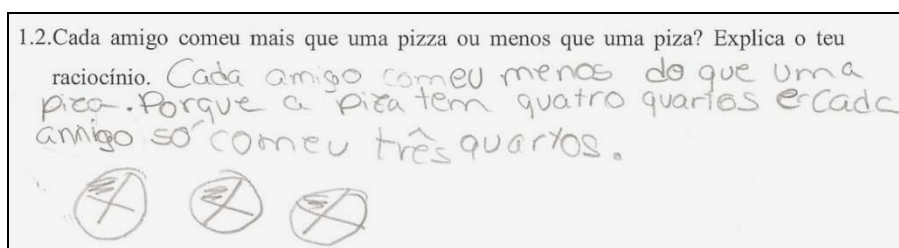


Fig. 3 – Resposta de Leonor e Amélia, FT4-T1.Q1.2.

Professora: Cada amigo comeu mais que uma pizza ou menos que uma pizza?

Turma: Menos.

Professora: Menos, porque Leonor?

Leonor: Porque eles comeram só $\frac{3}{4}$ e uma pizza inteira tem $\frac{4}{4}$.

André: Oh professora e não é só isso, vê-se logo porque se há 3 pizzas eles são 4 não dá para comerem mais do que uma unidade.

As alunas comparam o todo e a parte, ou seja percebem que o todo tem 4 partes mas cada amigo só come 3 dessas partes. Podemos dizer que transformam a unidade numa fracção de numerador e denominador 4 e depois comparam apenas os numeradores.

Questão 3. Esta questão pede aos alunos que comparem as partes obtidas nas

questões anteriores ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$). É igualmente uma exploração numa situação contextualizada com grandezas contínuas, mas envolvendo o significado medida. As questões anteriores deram oportunidade de comparar fracções com denominadores iguais e esta questão envolve uma situação de comparação entre fracções com numeradores iguais e com denominadores diferentes.

Na sua discussão em turma começou-se por estabelecer a relação entre o tamanho da parte que cabe a cada amigo nas duas situações ($\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$):

Professora: Qual a diferença entre aquilo que cada um come no primeiro caso e no segundo caso? O que é que se alterou?

Amélia: Foi que ficou partido em mais partes.

Professora: E o que é que aconteceu a cada parte?

Alunos: Ficou mais pequenino. Ficou a metade.

Leonor: Pois é $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$!

Professora: Quer dizer que cada um passou a comer que parte daquilo que comiam no primeiro caso?

Alunos: A metade.

Professora: Pois porque nós duplicámos o número de amigos, logo cada um teve de partilhar cada fatia com outro.

Os alunos, através das perguntas da professora, referem que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$, porque cada parte passa a ser metade da anterior. Verifica-se que esta situação apresenta um contexto significativo para os alunos, porque se tentássemos de modo abstracto dizer aos alunos que $\frac{3}{8}$ é metade de $\frac{3}{4}$ seria certamente complicado. Assim os próprios alunos tiveram oportunidade para deduzir isso através de uma situação familiar e lógica.

Para comparar $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$, Leonor e Amélia usam um raciocínio informal do dia-a-dia:

Questão 3

Em qual dos grupos anteriores, o de quatro amigos (Questão 1) ou o de oito amigos (Questão 2), cada amigo comeu mais piza? Explica o teu raciocínio. O grupo que comeu mais piza foi o grupo de 4 amigos, porque se partirmos para mais gente as fatias ficam cada vez mais pequenas.

Fig. 4 – Resposta de Leonor e Amélia, FT4-T1.Q3.



Professora: Em qual dos grupos anteriores, cada amigo comeu mais piza?

Nuno: Eu acho que foi na questão 1, porque na 2 tínhamos que dividir as pizzas para 8 pessoas e na 1 só tínhamos 4 pessoas.

André: Pois tínhamos menos pessoas para distribuir.

Professora: E a quantidade de piza é sempre a mesma, não é?

Amélia e Leonor: Pois nós também pensámos assim, só que dissemos que as fatias assim ficavam cada vez mais pequeninas.

Amélia: Podemos concluir que comem o mesmo número de fatias, mas como partimos por menos pessoas (na questão 1) as fatias são maiores.

As alunas concluem que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{3}{8}$ porque em ambos os casos o número de fatias é igual, mas na primeira situação ($\frac{3}{4}$) as fatias são maiores porque dividem as pizzas por menos pessoas. Usam, assim, uma estratégia informal, reconhecendo a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que a unidade está dividida.

Tarefa 2. Escreve por ordem crescente os seguintes números:

$\frac{1}{4}$; $\frac{7}{10}$; 26%; 0,267

Esta é uma tarefa de exploração que solicita aos alunos que ordenem um conjunto de 4 números racionais representados sob a forma de fracção, percentagem e numeral decimal. Após Miguel apresentar a sua resolução da tarefa, Leonor intervém para discordar da resposta do colega:

Miguel: O primeiro é 1 de 4.

Professora: Porquê?

Miguel: Porque $\frac{1}{4}$ é igual a 0,25.

Professora: Que é igual a 25%? Ok

Miguel: A seguir é o 0,267

Professora: E a seguir?

Miguel: 26%.

Professora: E a seguir?

Miguel: Sete décimos.

Leonor: Eu acho que está mal. $\frac{7}{10}$ está certo, mas o outro dava 26,7%.

Professora: Se tu fosses transformar isto em percentagem...

Leonor: Dava 26,7%.

Professora: E então concordam?

Turma: sim

Leonor: Temos de trocar o 0,267 com o 26%.

Professora: Mas também podíamos transformar o 26% em decimal, como é que ficava?

Leonor: 0,260.

Professora: Então comparando as percentagens ou os decimais chegamos à mesma conclusão. Então e o $\frac{7}{10}$, fica ali porquê?

Aluno: É como se fosse 0,700.

Professora: E em percentagem?

Leonor: 70%.

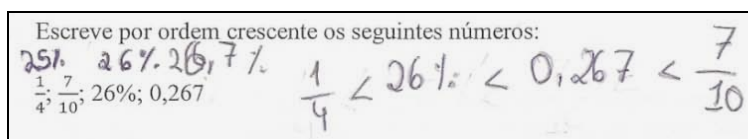


Fig. 5 – Resposta de Leonor e Amélia, FT4-T2.

Neste caso, para comparar os números apresentados, a aluna transforma todos os números em percentagem, compara-os nesta representação, e apresenta a resposta nas representações indicadas na pergunta. Na primeira entrevista a aluna tinha usado essencialmente a representação pictórica para comparar fracções e nesta fase já consegue converter, com destreza, fracções e decimais em percentagens e usar essa representação na respectiva ordenação.

Compreensão dos Números Racionais no Final da Unidade de Ensino

Neste ponto apresentamos o trabalho desenvolvido pela aluna na entrevista realizada depois na unidade de ensino. Analisamos a sua evolução na compreensão dos números racionais, bem como da sua ordenação e comparação.

Tarefa 1. Um grupo de amigos foi lanchar e as 5 meninas dividiram quatro tartes e os quatro meninos dividiram três tartes iguais às das meninas.

- Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?
- Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?



Questão a). Esta questão pede que a aluna partilhe 4 tartes por 5 meninas e 3 tartes por 4 meninos e compare a parte que cabe a cada menino e a cada menina. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado quociente. A informação é dada em linguagem verbal e não são dadas indicações sobre a representação a utilizar na resposta.

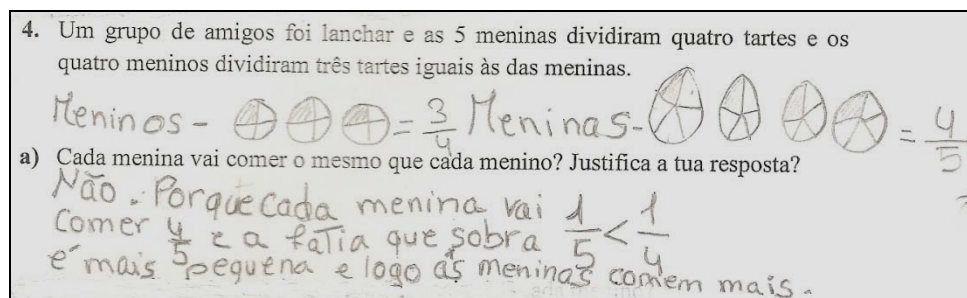


Fig. 6 – Resposta de Leonor E2-T1a).

Leonor: Aqui podemos fazer 4 tartes, este é o caso das meninas...

Professora: Então tens de identificar aqui: meninas.

Leonor: E pintávamos $\frac{1}{5}$ de cada tarte

Professora: E cada um comia...

Leonor: Comia 4 quintos

(...)

Leonor: E eles comeram 3 quartos.

Deste modo, Leonor começa por representar pictoricamente a situação e conclui que cada menina come $\frac{4}{5}$ e cada menino $\frac{3}{4}$ de uma tarte. Não revela qualquer dificuldade na representação das fracções.

A aluna consegue representar corretamente as fracções da tarte que cada menino e que cada menina vai comer, recorrendo à representação pictórica da situação. Contudo, para comparar essas duas fracções, começa por tentar usar o pensamento residual:

Professora: E agora a pergunta: Cada menino vai comer o mesmo que cada menina?

Leonor: Sim.

Professora: Sim? Então isso quer dizer que $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{4}{5}$?

Leonor: Só falta um, aqui só falta $\frac{1}{5}$ para chegar à unidade e aqui só falta $\frac{1}{4}$ para chegar à



unidade, mas aqui ($\frac{3}{4}$) as fatias são maiores, porque só está dividido em 4.

Leonor comete o erro designado por Post et al. (1986) por *gap thinking*, ao considerar que as fracções são iguais porque em ambas “só falta um” para chegar à unidade. Considera apenas o facto de faltar uma parte para formar a unidade e não considera o denominador, ou seja, o tamanho de cada fatia, que é diferente, não considera o tamanho real das fracções, não considera a relação de compensação entre o tamanho e o número de partes iguais em que a unidade está dividida. Esta é uma forma de pensar nos números inteiros.

A aluna continua a refletir sobre os dois números e introduz um novo elemento de análise ao perceber que as fatias não são iguais (“não são do mesmo tamanho”), porque cada uma está dividida de maneira diferente.

Professora: Então onde é que comeram mais?

Leonor: Os meninos, porque a piza está dividida em menos partes e as fatias são maiores.

Professora: Então a fatia que sobra, aí sobra $\frac{1}{3}$, e aqui sobra quanto?

Leonor: $\frac{1}{4}$.

Professora: Então, qual é que é a fracção maior?

Leonor: $\frac{1}{3}$.

Professora: $\frac{1}{3}$ é maior do que $\frac{1}{4}$?

Leonor: Sim.

(...)

Leonor: $\frac{1}{3}$ é mais pequeno que o outro ($\frac{1}{4}$).

Professora: Então o que sobra aqui ($\frac{1}{3}$) é maior ou mais pequeno?

Leonor: É mais pequeno.

Professora: Então o que é que sobra aqui?

Leonor: $\frac{1}{4}$.

Professora: Que é...

Leonor: Maior e aqui sobra $\frac{1}{3}$ que é mais pequeno.

Professora: Então onde é que comeram mais?

Leonor: Aqui onde sobra menos e as fatias são mais pequenas, aquela que sobra ($\frac{1}{3}$) também é mais pequena do que a outra ($\frac{1}{4}$).



Professora: Então como é que fica, qual é que é maior? Quem é que come mais?

Leonor: As meninas.

Professora: Porquê?

Leonor: Porque a fatia que sobra é mais pequena.

Professora: De certeza?

Leonor: Sim.

Tendo por base essa nova análise a aluna comete um novo erro ao referir que $\frac{3}{4}$ é maior do que $\frac{1}{5}$ porque no primeiro a tarte está dividida em menos partes e por isso cada parte é maior do que na segunda. Ou seja, a aluna compara apenas a fracção unitária e generaliza. Não mostra conhecer que existe uma relação inversa entre o tamanho da fatia que sobra e o tamanho da parte que se come. Leonor não consegue concluir com facilidade que quanto maior é a fatia que sobra, menor é a parte que eles comeram. Revela ter uma ideia sobre a estratégia informal de *pensamento residual*, mas mostra-se insegura na sua utilização e comete erros.

No final, depois de alguma reflexão e de algumas perguntas e organização das ideias com a minha ajuda, a aluna consegue concluir corretamente a relação entre a parte que sobra e a parte que eles comem, mas mostra pouco à vontade e bastantes dificuldades.

Questão b). Esta questão requer que a aluna partilhe 4 tartes por 5 meninas e 3 tartes por 4 meninos e represente em forma de fracção a parte da tarte que cabe a cada menino e a cada menina. Trata-se de uma situação contextualizada, no significado quociente, sendo a informação dada em linguagem verbal. No fundo, a aluna já tinha respondido a esta questão na alínea anterior. Volta a apontar para a representação que já tinha feito anteriormente. Deste modo, Leonor indica que a fracção da tarte que cabe a cada menino é $\frac{3}{4}$ e a cada menina $\frac{1}{5}$, referindo:

Leonor: Já sei esta, cada menina vai comer $\frac{1}{5}$ e cada menino vai comer $\frac{3}{4}$.

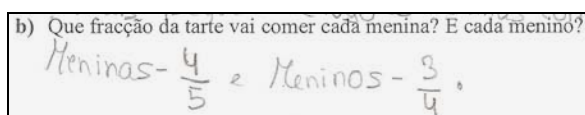


Fig. 7 – Resposta de Leonor E2-T1b).

Neste ponto, Leonor não mostra qualquer dificuldade na representação em

fracção da parte da tarte que cabe a cada menina e a cada menina, mas é de sublinhar que ainda se socorre da representação pictórica para chegar à representação em fracção.

Esta questão pede para ordenar três fracções com denominadores diferentes. Apresenta uma situação contextualizada, no significado parte-todo, sendo a informação dada em fracção.

Tarefa 2. No último dia do primeiro período os alunos do 5.º ano organizaram uma gincana. O percurso da gincana foi feito da seguinte forma:

- $\frac{1}{4}$ a correr ao pé coxinho;
- $\frac{2}{12}$ a segurar, com a boca, uma colher com um ovo;
- $\frac{2}{3}$ enfiados dentro de um saco de batatas;

Qual foi o maior trajeto? Justifica a tua resposta.

Para decidir o maior trajeto e ordenar as três fracções com denominadores diferentes Leonor usa a estratégia definida por Post et al. (1986), por *pensamento residual*, que se refere à quantidade que é necessária para fazer o todo e escreve:

Qual foi o maior trajeto? Justifica a tua resposta.
 O Maior trajeto foi o $\frac{2}{3}$ porque só falta $\frac{1}{3}$ para a unidade.
 Porque $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que $\frac{5}{6}$ e $\frac{10}{12}$

Fig. 8 – Resposta de Leonor, E2-T2

Leonor: Eu acho que foi os dois terços porque só falta um terço para chegar à unidade e nos outros não, aqui faltam $\frac{5}{6}$ (em $\frac{5}{6}$), aqui faltam $\frac{10}{12}$ (em $\frac{10}{12}$) e aqui só falta $\frac{1}{3}$.

Professora: Representa lá isso que me estás a dizer.

Leonor: Preciso de fazer $\frac{2}{3}$ e...

Professora: Tens de fazer tudo, tens de justificar porque é que dizes que o maior é o $\frac{2}{3}$.

Leonor: (lê a resposta que escreveu) O maior trajeto foi $\frac{2}{3}$ porque só falta $\frac{1}{3}$ para a unidade.

Professora: E isso quer dizer então que $\frac{1}{3}$ que é aquilo que falta...



Leonor: ... Para a unidade.

Professora: É maior ou mais pequeno que os outros?

Leonor: É...é maior.

Professora: Aquilo que falta para chegar ao fim é maior?

Leonor: Não é mais pequeno...

Professora: Então quer dizer que $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que ...

(...)

Leonor: $\frac{5}{8}$. Porque $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que $\frac{5}{8}$.

Professora: E também do que...

Leonor: $\frac{10}{12}$. Ah, sim $\frac{10}{12}$.

Professora: Então se aquilo que falta para chegar ao todo é mais pequeno aí então os outros são pequenos.

Leonor: Porque $\frac{1}{3}$ é mais pequeno do que $\frac{5}{8}$ e $\frac{10}{12}$.

Assim, em vez de comparar $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{12}$ e $\frac{2}{3}$ compara as fracções complementares $\frac{3}{4}$; $\frac{10}{12}$ e $\frac{1}{3}$. Mostra alguma confusão e indecisão na explicação do facto de a maior fracção ser aquela cuja parte que falta para fazer o todo é a mais pequena, mas depois de um ponto da situação, consegue concluir e explicar qual a maior fracção. Mostra conhecer a linguagem convencional para representar as fracções, usa a linguagem específica das mesmas e usa uma estratégia informal para ordenar e comparar as fracções com denominadores diferentes.

Tarefa 3. Ordena os seguintes números por ordem crescente

a) 0,67; 3,400; 69%; 0,7; 8,01; 2,5

b) $1\frac{1}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; 24%

As questões a) e b) são questões de ordenação de números racionais na representação decimal e fraccionária, respectivamente. Trata-se de uma tarefa colocada num contexto puramente matemático.

a) 0,67; 3,400; 69%; 0,7; 8,01; 2,5

$0,67 < 69\% < 0,7 < 2,5 < 3,400 < 8,01$

Fig. 9 – Resposta de Leonor, E2-T3a).

Na questão a), a aluna começa por referir que existem números em representações diferentes e que devemos transformá-los todos na mesma representação. Mostra perceber que podemos representar os números todos em numeral decimal ou todos em percentagem mas opta por transformar a única percentagem em decimal. Explica ainda que deve acrescentar zeros em todos para ficarem com milésimas porque segundo diz: “assim é mais fácil” e afirma ainda que, se tiverem com “nomes” diferentes não os conseguimos comparar.

b) $1\frac{1}{2}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, 24%
 $24\% < \frac{1}{4} < \frac{2}{5} < 1\frac{1}{2} < \frac{6}{2}$

Fig. 10 – Resposta de Leonor, E2-T3b).

Na questão b) a aluna refere que pode fazer o mesmo que na alínea anterior e para isso transforma as fracções em decimais e depois “acrescenta zeros” para que todos os números fiquem com milésimas. Mostra compreender o numeral misto fraccionário apresentado e transforma-o em decimal sem recorrer a qualquer algoritmo. Nas restantes fracções divide o numerador pelo denominador. Na fracção $\frac{2}{3}$ começa por confundir as operações e multiplica o numerador pelo denominador, mas rapidamente se auto-corrige. Também aqui usa a representação decimal apenas como apoio à ordenação e na resposta usa as representações apresentadas, fracção e percentagem:

Leonor: *Aqui podia ser o mesmo, praticamente o mesmo. Aqui podia ser 1,5 ($1\frac{1}{2}$), aqui podíamos dividir ($\frac{6}{2}$) para saber quanto é que era.*

Professora: *Fazíamos 6:3?*

Leonor: *Sim, 6:2.*

Professora: *E quanto é que dá 6:2?*

Leonor: *Dá 3. (Pensa alto à medida que vai fazendo as conversões) aqui é 0,25 ($\frac{1}{4}$), aqui dá 10 (5×2), não aqui dá 0,4 ($\frac{2}{5}$) e aqui 24% é 0,24. Primeiro é 0,24 que é 24%, depois 0,25, um quarto; depois $\frac{2}{3}$.*

Professora: *Depois o $\frac{2}{3}$ que é quanto? Como é que comparaste com o 0,25?*

Leonor: *Acrescentei zeros aqui, se acrescentar zeros aqui vamos ver que é maior.*



Agora o 1 e uma metade e o 3, 6 metades.

Conclusão

Este artigo analisa de que modo uma unidade de ensino em que se trabalha numa perspectiva exploratória, com diferentes representações e significados de número racional, diferentes tipos de grandezas e tarefas de natureza diversificada, pode contribuir para a compreensão dos números racionais e da sua comparação e ordenação em alunos do 5.º ano.

A forma como foram usadas as diferentes representações foi bem aceite pelos alunos. A representação em fracção, já conhecida de alguns alunos do 1.º ciclo, embora de modo limitado, assumiu o papel principal nesta unidade de ensino. Além disso, usou-se com frequência a representação em numeral decimal, já conhecida dos alunos, e que serviu de âncora para muito do trabalho realizado. A representação pictórica foi também bastante usada, revelando-se um apoio muito importante para os alunos em certos tipos de tarefas, sobretudo no significado quociente. A representação verbal mereceu igualmente atenção, procurando-se que os alunos dominassem a linguagem convencional relativa aos números racionais.

A evolução de Leonor sugere que estas opções foram adequadas. Na verdade, a aluna mostra ultrapassar as suas limitações iniciais de linguagem e melhora o seu desempenho na ordenação de fracções, onde mostrava considerável dificuldade. A utilização simultânea das diversas representações leva a aluna a começar rapidamente a interpretar as fracções como números, o que constitui um avanço importante na construção da noção quantitativa de número racional (Post et al., 1986). Além disso, a utilização concomitante da representação decimal e fraccionária (Owens, 1993) permitiu-lhe, em diversas tarefas, usar a representação com que mais se sente à vontade. É notório que adquire a compreensão que os números racionais podem ser representados de diferentes formas e mostra flexibilidade para converter e relacionar essas diferentes representações, um aspecto fundamental da compreensão de número racional (Post et al., 1993). Ao longo da unidade de ensino a aluna vai-se afastando da representação pictórica, deixando de a utilizar para responder às questões, e usando-a apenas como apoio à resolução de tarefas no significado quociente.

Nesta unidade de ensino, foram usadas tarefas de natureza diversificada, com relevo para problemas, tarefas de exploração e exercícios. Em particular, as tarefas de

exploração, em que os alunos têm que procurar fazer sentido de questões para as quais não têm conhecimentos prévios formais que lhes permitam uma resposta imediata, revelaram-se apropriadas para servir de base a trabalho muito produtivo por parte dos alunos. O significado parte-todo foi muito valorizado uma vez que, pelo programa em vigor, não recebe atenção específica no 1.º ciclo do ensino básico. O significado medida foi também muito valorizado, dado constituir um suporte fundamental para a compreensão da comparação e ordenação dos números racionais. Os significados quociente, operador e razão foram também objecto de atenção, embora de modo mais secundário, para que os alunos pudessem construir uma noção abrangente de número racional. Além disso, foram trabalhadas situações com diferentes tipos de grandezas (discretas e contínuas, com unidades simples e compostas) de modo a que os alunos adquirissem familiaridade em contextos muito diversos. Leonor melhorou na sua capacidade de ordenar numerais decimais com um número diferente de casas decimais. Na comparação de pares de fracções com numeradores e denominadores diferentes, não usa fracções equivalentes, preferindo transformar as fracções em numerais decimais e ordená-los nessa representação, tirando partido da flexibilidade na conversão de representações.

Deste modo, a unidade de ensino, em termos globais, revelou-se equilibrada e promotora de aprendizagens significativas por parte dos alunos. A realização do diagnóstico prévio permitiu ter uma boa noção do progresso por eles realizado e o caso de Leonor mostra como mesmo uma aluna com bom desempenho pode trazer dificuldades no domínio de um ou outro conceito ou representação que, no entanto, puderam ser eficazmente ultrapassados no decurso desta unidade de ensino elaborada segundo as orientações do novo programa de Matemática (ME, 2007).

Referências Bibliográficas

- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(3), 215-232.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual



- differences. *Learning and Instruction*, 9, 343-363.
- Godino, J. D., Ruiz, F., Roa, R., Cid, E., Batanero, C., & Font, V. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática da Universidade de Granada. Recuperado em Novembro 5, 2009, de <http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm>
- Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarró, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: Associação de Professores de Matemática (APM).
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Greenwich, CT: Information Age.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach*. San Francisco, CA: Jossey Bass.
- Ministério da Educação (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e do Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Recuperado em Novembro 5, 2008, de <http://sitio.dgicd.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>.
- Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.
- Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (NCTM Yearbook, pp. 109-120), Reston, VA: NCTM.
- NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 3, 63-75.
- Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston, VA: NCTM.

- Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65(4), 421-481.
- Patton, M. Q. (1987). How to use qualitative methods in evaluation. Newbury Park, CA: Sage.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *BOLEMA*, 25, 105-132.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE).
- Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8(1), 39-48.
- Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/93_6.html
- Post T., Wachsmuth I., Lesh R., & Behr M. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 18-36.
- Streefland, L. (1991). Fractions an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Webb, D., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(2), 110-113.