Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo

Joana Mata-Pereira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Introdução

Na nossa sociedade, faz parte do senso comum considerar que a Matemática desenvolve o raciocínio. No entanto, o próprio raciocínio é necessário para a compreensão desta ciência. Para compreender um conceito em Matemática não basta conhecer a sua definição, requer também perceber o modo como o conceito se relaciona com outros conceitos e como pode ser usado. A compreensão de procedimentos envolve perceber a razão por que funcionam, como podem ser utilizados e como podem ser interpretados os seus resultados (NCTM, 2009). Deste modo, desenvolver a capacidade de raciocínio matemático dos alunos não se resume a memorizar conceitos e procedimentos rotineiros. Pelo contrário, centrar a aprendizagem na memorização promove nos alunos uma visão da Matemática como um conjunto de regras desconexas e não como uma ciência lógica e coerente (ME, 2007).

A importância do raciocínio matemático é sublinhada por Russel (1999), que indica o seu lugar central na aprendizagem da Matemática. O atual *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007) também destaca o raciocínio matemático que apresenta como capacidade transversal a desenvolver ao longo da escolaridade. Os objetivos de aprendizagem para o 3.º ciclo incluem, nomeadamente: (i) formular, testar e demonstrar conjeturas; (ii) distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjetura e fazer demonstrações simples; (iii) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; (iv) compreender o papel das definições em Matemática; (v) distinguir uma argumentação informal de uma demonstração; e (vi) selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração (ME, 2007).

Promover o raciocínio matemático dos alunos é um aspeto central do trabalho do professor (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011) que, no entanto, tem sido muito pouco investigado. Para progredirmos na compreensão desta questão, um passo fundamental é conhecer melhor os processos de raciocínio dos alunos. Assim, o nosso objetivo é analisar os processos de raciocínio de alunos do 7.º e 9.º anos na resolução de tarefas de cunho algébrico envolvendo propriedades dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$. Pela sua importância, centramos a nossa atenção na generalização e na justificação enquanto processos-chave de raciocínio matemático e consideramos as representações usadas e os processos de significação envolvidos, dada a sua estreita relação com o raciocínio.

Raciocínio matemático

Generalização e justificação

Raciocinar é fazer inferências, ou seja, usar a informação existente para chegar a novas conclusões. Assim, Oliveira (2008) carateriza o raciocínio matemático como «um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)» (p. 3). No entanto, esta caraterização acomoda perspetivas diversas sobre o raciocínio matemático. Por exemplo, Aliseda (2003) identifica este raciocínio com inferência lógica, caraterizada pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões, concebendo o raciocínio matemático numa perspetiva dedutiva. Outros autores, alargam o raciocínio matemático ao campo indutivo, em que se formula uma generalização a partir da identificação de uma certa característica comum a diversos casos, e abdutivo, em que se formula uma generalização estabelecendo uma relação entre diversos aspetos de certa situação (Rivera & Becker, 2009). Por exemplo, Russel (1999) refere que, na aprendizagem da Matemática, o raciocínio é «o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objeto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objetos» (p. 1). Também Lannin, Ellis e Elliot (2011) consideram que o raciocínio matemático é «um processo evolutivo de conjeturar, generalizar, investigar porquê e desenvolver e avaliar argumentos» (p. 10). Deste modo, raciocinar matematicamente pode dizer respeito tanto a aspetos lógicos como a processos intuitivos, incluindo a formulação de novas ideias e a consecução e validação de novas conclusões.

Os processos de raciocínio incluem a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas e a realização de justificações. Conjeturar consiste em raciocinar sobre as relações matemáticas para desenvolver afirmações que têm o intuito de ser verdadeiras, mas que não se conhecem como tal (Lannin, Ellis, & Elliot, 2011). Ao fazê-lo, os alunos identificam pontos comuns entre vários casos, desenvolvendo generalizações que os levam a usar e clarificar o significado de conceitos, símbolos e representações. Muito mais do que afirmações sobre objetos particulares, a Matemática procura fazer afirmações gerais sobre grandes classes de objetos. Por isso, a generalização constitui uma modalidade particularmente importante de formulação de conjeturas.

Na formulação de generalizações, Galbraith (1995) distingue entre os alunos que seguem abordagens empíricas, testando alguns casos, e os que seguem uma abordagem dedutiva. Nos que seguem abordagens empíricas, este autor distingue ainda dois grupos: os que fazem testes ao acaso, de modo arbitrário, e aqueles em que a escolha dos casos a testar é guiada pela sua compreensão do domínio da conjetura que está a ser testada. Por seu lado, os alunos que seguem abordagens dedutivas enfrentam três etapas: (i) «reconhecer a relevância de um certo princípio externo»; (ii) «reconhecer o modo em que o princípio é útil»; e (iii) «aplicar o princípio apropriadamente» (Galbraith, 1995, pp. 415-6), podendo o insucesso ou o erro ocorrer em qualquer das etapas.

No final do ensino básico, espera-se que os alunos sejam capazes de justificar afirmações apoiando-se em procedimentos, propriedades e definições matemáticas (ME, 2007). Contudo, os resultados de investigação realizada em diversos países indicam que «apenas a um nível avançado os alunos reconhecem a necessidade de raciocínio convincente com base num conjunto de pressupostos explícitos» (Galbraith, 1995, p. 412). Por isso, é necessário que os alunos sejam incentivados a apresentar justificações, ainda que sem o rigor associado à demonstração matemática formal. Como indicam Lannin, Ellis e Elliot (2011), deve procurar-se que os alunos (i) façam justificações através de argumentos lógicos baseados em ideias já compreendidas anteriormente, (ii) justifiquem refutações partindo do facto de uma determinada afirmação ser falsa, (iii) avaliem a validade dos argumentos utilizados, (iv) tenham presente que uma justificação matemática não é um argumento baseado na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos particulares, e (v) procurem justificar o porquê de uma generalização ser verdadeira ou falsa investigando quais os fatores que podem influenciar essa generalização. No que respeita à refutação de afirmações, Galbraith (1995) indica que os alunos mostram muitas vezes dificuldade em compreender que um contraexemplo de uma afirmação matemática deve satisfazer as condições dadas e violar as suas conclusões e também dificuldade em aceitar que um só caso seja suficiente para refutar uma afirmação. Por seu lado, Lithner (2000, 2003, 2008), em diversas investigações sobre os processos de raciocínio dos alunos, indica que estes, na resolução de tarefas, tendem a focar-se sobretudo no que lhes é familiar e no que recordam a um nível superficial, dando pouca atenção às propriedades matemáticas dos conceitos envolvidos, mesmo quando estes poderiam proporcionar fortes progressos. Refere que, nos poucos casos em que as estratégias dos alunos se apoiam em conceitos matemáticos relevantes, o raciocínio tende a ser dominado por imagens guardadas na memória e por rotinas familiares. Assumindo que a explicação e justificação de conclusões permitem aos alunos evidenciar e esclarecer o seu raciocínio (NCTM, 2007), cabe ao professor criar situações em que a justificação tenha um papel central.

Azevedo (2009) procura compreender como se desenvolvem os processos de raciocínio usados por alunos do 10.º ano com diferentes níveis de desempenho escolar em Matemática, a partir do trabalho numa unidade de ensino sobre Funções. Os resultados sugerem que os alunos, para além da aprendizagem com significado das funções, desenvolveram diversos aspetos da sua capacidade de raciocínio: (i) a realização de tarefas de exploração e investigação promoveu a identificação de regularidades e a formulação, teste e justificação de conjeturas; (ii) a realização de relatórios escritos e apresentações orais desenvolveu a capacidade de justificar processos e a compreensão da sua necessidade; e (iii) as discussões e reflexões sobre a resolução das tarefas promoveram a clarificação de pensamentos intuitivos e alargamento das estratégias usadas pelos alunos. Também Henriques (2011), ao analisar os processos de raciocínio de alunos do ensino superior no qua-

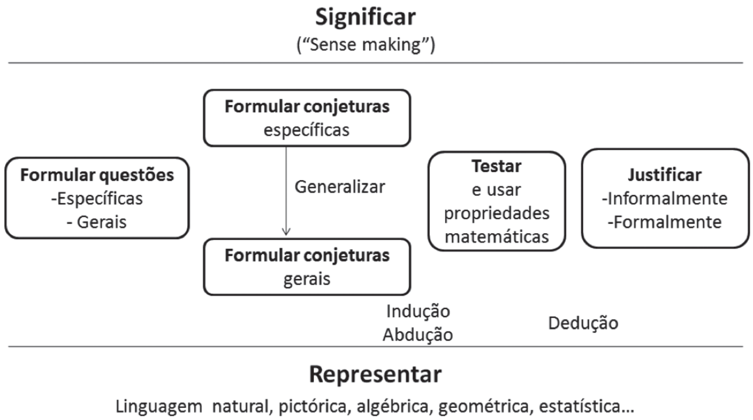


Figura 1.—Quadro conceptual para o estudo do raciocínio matemático (adaptado de Mata-Pereira & Ponte, 2011)

dro de uma experiência de ensino baseada na resolução de problemas e na realização de atividades de investigação, considera que as tarefas propostas aos alunos permitiram-lhes o contacto com diversos processos matemáticos, como a formulação de questões e conjeturas, o teste e a justificação de conjeturas e levam-nos a compreender a necessidade de justificar as conjeturas que pensam ser verdadeiras.

Um quadro conceptual para a análise do raciocínio que relaciona a generalização e a justificação com os raciocínios indutivo e dedutivo, bem como com a formulação de questões e conjeturas encontra-se na Figura 1. O raciocínio matemático, correspondendo à zona central da figura, apoia-se nas representações e articula-se com os processos de representação e significação (*sense making*). Atendendo à impossibilidade de aceder diretamente ao raciocínio dos alunos, as representações que estes usam para comunicar esse raciocínio são fundamentais. Por outro lado, os processos de significação em articulação com o raciocínio matemático são essenciais para uma compreensão efetiva da Matemática (NCTM, 2009). Os raciocínios indutivo e abdutivo ocorrem sobretudo durante a formulação de conjeturas, enquanto o raciocínio dedutivo tem lugar em especial durante o teste e a justificação (figura 1).

Representação e significação

O programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007) salienta o importante papel das representações matemáticas em toda a aprendizagem, sugerindo que «o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação» (p. 9) e destacando a necessidade dos alunos compreenderem e saberem usar diferentes representações. Ao acederem às representações matemáticas e às ideias que estas expressam, os alunos adquirem um conjunto de ferramentas que ampliam a sua capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2007). Deste modo, compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos só é possível ao observar as suas representações (NCTM, 2007).

Tal como o raciocínio matemático, também a representação é um conceito complexo que pode ser abordado de diversos modos. Por exemplo, Goldin (2008) considera que uma representação é uma configuração que pode substituir, sugerir ou simbolizar um objeto que está a ser representado. Pelo seu lado, Duval (2006) destaca que os objetos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação, sublinhando que este é um dos maiores problemas na compreensão matemática pois não é possível aceder a um objeto matemático sem ser através das suas representações.

Ambos os autores distinguem representações externas e internas. Goldin (2008) salienta que as representações internas se relacionam com os sistemas de representação psicológica dos indivíduos que não podem ser diretamente observadas por terceiros. Este autor indica que as representações internas constituem sistemas interrelacionados que permitem ao indivíduo produzir um vasto leque de representações externas. Duval (2004, 2006) refere duas transformações de representações externas distintas, os tratamentos e as conversões. Os tratamentos consistem em transformações dentro de um mesmo registo de representação, como resolver uma equação ou completar uma figura utilizando critérios de simetria. As conversões são transformações entre registos de representação, transformando a representação de um objeto, situação ou informação dada num dado registo numa representação num outro registo de representação. São exemplo de conversões a passagem de uma representação algébrica de uma função para a sua representação gráfica ou a passagem de uma descrição ou de uma relação em linguagem natural para notação algébrica. Esta mudança de registo de representação nem sempre é simples, mas muitas vezes é necessária para uma compreensão adequada do objeto em questão. O desenvolvimento do raciocínio passa, assim, pela distinção entre representante e representado e pela diversificação e coordenação dos diferentes registos de representação (Duval, 2004).

Os processos de significação têm também um papel importante no desenvolvimento do raciocínio matemático na medida em que, sem eles, não é possível estabelecer as conexões necessárias para formular, testar e justificar conjeturas. A significação consiste em estabelecer relações com o conhecimento existente de modo a desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito (NCTM, 2009), não se resumindo portanto ao estabelecimento de conexões. Neste sentido, tanto a significação pode ser assumida como um aspeto do raciocínio, como o raciocínio pode ser assumido como um aspeto da significação. A significação, como aspeto do raciocínio, contribui para identificar elementos comuns em determinadas observações e perceber como tais elementos estabelecem conexões com situações anteriores (NCTM, 2009). O raciocínio dedutivo, enquanto aspeto da significação, ajuda a compreender o significado do que está a ser demonstrado, a ver o que é verdade mas também porque é verdade (Hanna, 2000). Esta relação entre raciocínio e significação, interligando processos informais e formais, constitui uma base para o desenvolvimento dos conhecimentos e capacidades dos alunos (NCTM, 2009). Deste modo, relacionar o raciocínio com as representações e a significação é essencial não só para o desenvolvimento do raciocínio mas também para a compreensão da Matemática.

Metodologia de investigação

O estudo apresentado neste artigo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), de observação participante (Jorgensen, 1989) em duas turmas, uma de 7.º e outra de 9.º ano, nas quais os professores trabalham com o atual programa de Matemática (ME, 2007). Ambas as turmas têm um ambiente de trabalho produtivo embora o desempenho dos alunos seja globalmente pouco satisfatório nesta disciplina. No 7.º ano, a investigadora (primeira autora) é professora da turma. A tarefa é desenvolvida na sala de aula durante a lecionação do tópico números inteiros e a recolha de dados é realizada dentro e fora da sala de aula, sendo entrevistados quatro alunos cujo desempenho se destaca claramente dos restantes, tendo em vista esclarecer os seus processos de raciocínio. Assim, a recolha de dados tem por base entrevistas individuais (videogravadas e denominadas E1-4), tendo em vista conhecer os processos de raciocínio dos quatro alunos, e secundariamente a observação das aulas (com registo de notas de campo). No 9.º ano, o trabalho foi realizado em colaboração com o professor de uma turma, que lecionou as respetivas aulas. A recolha de dados é realizada na sala de aula, durante a lecionação dos tópicos números reais e inequações, sendo a observação (com videogravação e denominada A1) realizada pela primeira autora que também acompanhou os alunos na realização das tarefas. Em ambos os casos é também realizada análise documental de produções escritas dos alunos. A mudança na estratégia da recolha de dados do 7.º ano para o 9.º ano teve em vista prestar maior atenção aos processos de raciocínio dos alunos no ambiente natural da sala de aula. Atendendo à dificuldade em conseguir uma observação aprofundada pelo próprio professor da turma, no papel de investigador, foi solicitada a colaboração de outro professor. Os dados assim recolhidos na sala de aula tornaram desnecessárias as entrevistas aos alunos do 9.º ano.

A tarefa apresentada aos alunos do 7.º ano integra uma questão subdividida em seis alíneas (Figura 2) cujo principal objetivo é levar os alunos a inferir algumas propriedades da multiplicação de números inteiros. As questões *a* e *b* pretendem que os alunos reconheçam que a multiplicação constitui uma estratégia mais eficaz que a adição sucessiva para a resolução de certos problemas. Em particular, a questão *b* visa a generalização da transformação da adição sucessiva de parcelas iguais numa multiplicação, a partir do seu conhecimento da propriedade análoga dos números naturais, já usada em ciclos anteriores. As questões *c*, *d*, *e* e *f* visam a associação da multiplicação de números inteiros à adição sucessiva de parcelas iguais de modo a que posteriormente os alunos identifiquem algumas propriedades da multiplicação neste conjunto numérico, nomeadamente quanto ao sinal do produto de dois números inteiros (figura 2).

No que se refere ao 9.º ano, debruçamo-nos sobre quatro questões de uma tarefa relativa ao tópico dos números reais que tem como principal objetivo explorar propriedades de expressões envolvendo operações com números reais e a raiz quadrada (figura 3). A resolução da questão 2 implica uma análise cuidada da questão 1, sendo insuficiente a aplicação direta de um procedimento de cálculo. A questão 2 e de modo mais explícito a questão 3 têm como objetivo a generalização de conclusões passíveis de obter na ques-

1. Dos números naturais aos números inteiros.
Observa as seguintes expressões:
$3+3+3+3+3+3+3+3+3+3 \qquad 7+7+7+7+7$

a. Determina o resultado das expressões. Explica como chegaste às respostas.

b. Tenta encontrar uma regra que permita obter o resultado das mesmas expressões sem utilizar a adição.

c. Representa as expressões seguintes utilizando a multiplicação:
$(-3)+(-3)+(-3) \qquad (-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)$

d. Determina o resultado das expressões anteriores.

e. Determina o resultado das expressões seguintes:
$(-3)\times 5 \qquad 5\times(-2) \qquad (+4)\times(+6)$

f. Tenta encontrar uma regra que permita determinar a multiplicação de dois números inteiros se forem:
i. Ambos positivos
ii. Um negativo e um positivo
iii. Ambos negativos
Todos os números inteiros seguem a regra que encontraste? Investiga.

Figura 2.—Tarefa: Propriedades dos números inteiros (7.º ano)

1. Determina o valor exato das seguintes expressões:

a) $\sqrt{4\times 16}$ **b)** $\sqrt{25\times 144}$ **c)** $\sqrt{36\times 2}$ **d)** $\sqrt{\frac{16}{4}}$

2. Observa atentamente os resultados obtidos em 1. Tenta encontrar uma regra que permita obter mais facilmente o valor das expressões:

a) $\sqrt{a\times b}$ (a e b não negativos) **b)** $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (a não negativo e b positivo)

3. Todos os números reais seguem as regras que obtiveste? Investiga.

4. Observa a igualdade $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que, para quaisquer valores reais a e b, é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Figura 3.—Tarefa: Propriedades dos números reais (9.º ano)

tão 1. A questão 4 visa levar os alunos a verificar que nem todas as expressões envolvendo operações com números reais e raízes quadradas têm as mesmas propriedades, pretendendo-se que encontrem um contra exemplo para a afirmação apresentada, verificando que, apesar da primeira igualdade ser verdadeira, a sua generalização não o é.

Neste artigo analisamos os dados relativos a quatro alunos da turma do 7.º ano e três alunos da turma do 9.º ano que, em ambos os casos, se situam entre os de melhor de-

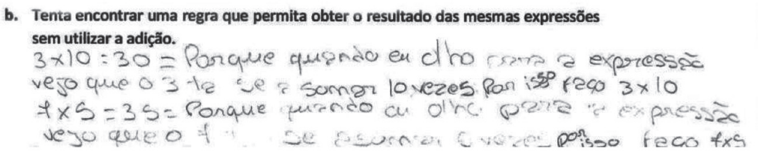


Figura 4.—Resolução de Cátia da questão *b*

sempenho nas respetivas turmas, selecionados dada a expectativa de apresentarem raciocínios mais elaborados e interessantes. Atendendo ao objetivo do estudo, a análise dos dados é realizada segundo duas categorias referentes a processos de raciocínio, generalização e justificação. São ainda consideradas para a análise duas dimensões transversais, representações e processos de significação. Relativamente às representações e processos de significação analisamos os tipos de transformações usadas, nomeadamente tratamentos e conversões, bem como o desenvolvimento da compreensão da situação, contexto ou conceito.

Generalização

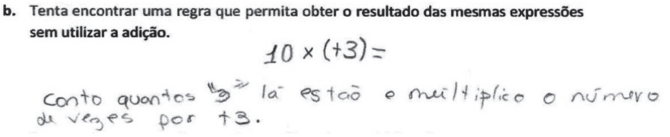
7.º ano

Os processos de generalização dos alunos do 7.º ano na resolução da tarefa são visíveis essencialmente nas questões *b*, *c* e *f*. Na questão *b* é solicitada uma generalização da propriedade que, no conjunto dos números naturais, permite a transformação de uma adição sucessiva numa multiplicação. Na questão *c* é necessária uma generalização da propriedade anterior ao conjunto dos números inteiros e, na questão *f*, uma generalização de algumas propriedades da multiplicação de números inteiros.

Ainda que a tarefa esteja construída com o intuito de promover tais generalizações, alguns alunos não as conseguem formular, como é o caso de Cátia na questão *b*, onde apresenta a multiplicação correspondente a cada uma das expressões, seguida de um esclarecimento em linguagem natural escrita (Figura 4).

Questionada no sentido de obter uma generalização, a aluna apenas consegue apresentar a propriedade em questão recorrendo a casos particulares:

> Investigadora: E se eu quiser para um número qualquer, qual era a regra?
>
> Cátia: Então, fazia-se igual só mudava-se os números.
>
> Investigadora: Não, mas explica-me o que é isso de fazer igual, como é que fazias?
>
> Cátia: Contávamos cada número, como aqui, contamos cinco setes, então fazemos sete vezes cinco.



b. Tenta encontrar uma regra que permita obter o resultado das mesmas expressões sem utilizar a adição.

$10 \times (+3) =$

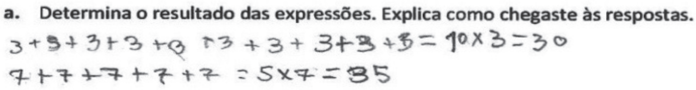
conto quantos "3" lá estaõ e multiplico o número de vezes por +3.

Figura 5.—Resolução de Tatiana da questão *b*

> INVESTIGADORA: (…) Mas voltaste a pegar neste exemplo (…) Diz-me, se eu tiver um número qualquer repetido não sei quantas vezes, como é que eu faço?
>
> CÁTIA: Fazemos o mesmo, contamos quantas vezes é que há o número e depois fazemos … Por exemplo, dois vezes vinte … (E1)

Cátia, nesta questão, tem facilidade nos tratamentos dentro da linguagem simbólica1, visto que realiza a transformação da adição sucessiva para a multiplicação. Durante a resolução inicial e o questionamento apresenta facilidade nas conversões entre a linguagem simbólica sem variáveis e a linguagem natural escrita e oral. Estabelece uma conexão entre uma propriedade conhecida e a situação particular presente na questão, desenvolvendo uma compreensão parcial da situação referente aos casos apresentados. Por outro lado, a aluna, como outros colegas, parece não estar familiarizada com o conceito de regra matemática, o que pode explicar a sua dificuldade nesta questão. Neste sentido, a sua compreensão da questão é apenas parcial, visto que não estabelece todas as conexões necessárias para a formulação de uma generalização apropriada, ainda que se trate de uma propriedade que os alunos conhecem de anos anteriores. Quando é esclarecido o que se pretende com a questão, apresenta dificuldades em generalizar, focando-se sempre em casos particulares e não apresentando uma conjetura válida para qualquer número natural. Outros alunos, para formularem as suas generalizações, baseiam-se em casos particulares já obtidos em questões anteriores. Tatiana, por exemplo, apresenta para a questão b uma resposta muito semelhante à de Cátia, ainda que se foque apenas numa das expressões do enunciado (figura 5). Contudo, quando lhe é indicado o que se entende por regra, apresenta de imediato a generalização pretendida.

> INVESTIGADORA: Aqui escreveste para esta expressão específica. Uma regra, quando se fala em regra, é para o geral, para qualquer número. (…) Se fosse agora, para tu me dizeres a regra, como é que a dizias?
>
> TATIANA: Multiplicar o número de vezes que o número se repete por esse número. (E2)

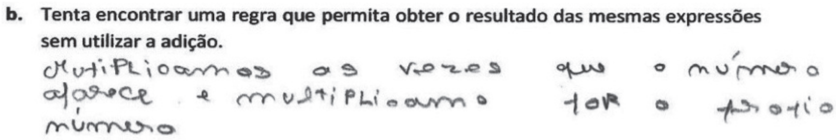


a. Determina o resultado das expressões. Explica como chegaste às respostas.

3+3+3+3+3+3+3+3+3+3= 10x3=30

7+7+7+7+7 =5x7=35

Figura 6.—Resolução de Bruno da questão *a*



b. Tenta encontrar uma regra que permita obter o resultado das mesmas expressões sem utilizar a adição.

Mutiplicamos as vezes que o número aparece e multiplicamo por o própio número

Figura 7.—Resolução de Bruno da questão *b*

Bruno, logo na questão *a*, indica explicitamente a transformação da adição sucessiva numa multiplicação, apresentando-a formalmente em linguagem simbólica (Figura 6).

Na questão seguinte, Bruno indica na sua resposta inicial uma regra que pode ser utilizada para qualquer das expressões apresentadas e para outras idênticas, identificando ainda que a regra pedida já foi utilizada na resolução da questão anterior, ainda que não o tivesse evidenciado anteriormente. Apesar da primeira resolução estar um pouco confusa na linguagem natural escrita (Figura 7), oralmente o aluno consegue expressar a regra de modo bastante melhor.

> Bruno: Foi aquela que utilizamos no exercício anterior.
>
> Investigadora: Que é como? Explica-me essa regra.
>
> Bruno: Contarmos o número de vezes que o número aparece e é esse número de vezes multiplicado por o número que aparece. (E3)

Na questão *e*, Bruno generaliza facilmente os resultados obtidos em *c* e *d*. Ainda que a sua justificação seja sucinta, é percetível o modo como utiliza casos anteriores para obter uma generalização:

> Era fácil. Fizemos como se não tivesse o menos ali e multiplicámos cinco vezes três que dá quinze. Como nós fizemos ali atrás, que ia dar menos, porque número negativo vezes número positivo vai sempre dar negativo. (Bruno) (E3)

Tatiana e Bruno têm facilidade nos tratamentos em linguagem simbólica sem variáveis e nas conversões entre linguagem simbólica sem variáveis e linguagem natural. Na questão *b*, ambos formulam a generalização pretendida aparentemente sem recorrer a casos particulares. Uma vez que já anteriormente tinham utilizado a propriedade em questão para casos particulares, a generalização parece advir de um processo indutivo. Na questão *e*, Bruno apresenta parcialmente a generalização que viria a ser solicitada na questão *f*, em que, a partir de casos particulares, identifica que a multiplicação de dois números inteiros é semelhante à de dois números naturais, à exceção do sinal. Ao formularem as generalizações, ambos alunos evidenciam, nas duas questões, uma compreensão da situação desenvolvida pelas conexões estabelecidas. Na questão *b*, as conexões são estabelecidas entre as expressões apresentadas nesta questão e nas anteriores, o conceito de regra matemática e a propriedade que permite a transformação de uma adição sucessiva numa multiplicação no conjunto dos números naturais. Na questão *e*, as conexões são estabelecidas entre as expressões apresentadas nesta questão e nas anteriores, as noções da multiplicação com números naturais e com números inteiros.

Noutras situações os alunos utilizam propriedades matemáticas para formular generalizações, sem recorrer visivelmente a casos particulares. Assim, na questão *c*, Pedro generaliza para uma situação com números inteiros, a propriedade que permite transformar a adição sucessiva numa multiplicação:

> Aqui menos três está a repetir-se três vezes, aí eu multipliquei menos três vezes três, que é o número de vezes que ele se repete. Aqui a mesma coisa, o menos quatro repete-se cinco vezes, eu multipliquei o menos quatro vezes cinco. (Pedro) (E4)

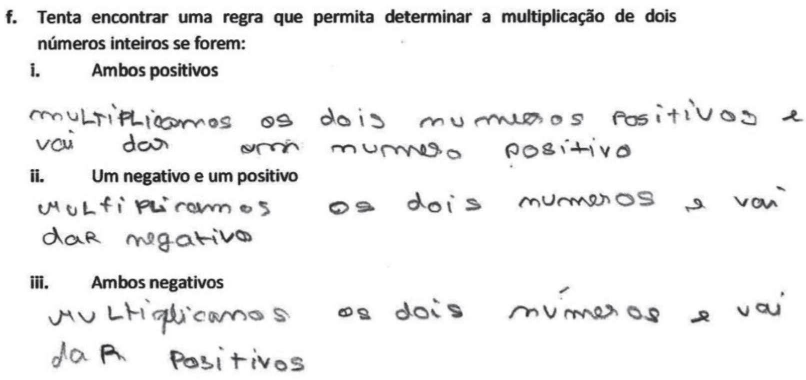
A generalização utilizada na questão *c* é igualmente visível na questão e, em que o aluno, ao sentir dificuldades na multiplicação de números inteiros, recorre novamente à adição, apesar de não o apresentar na sua folha de respostas. No entanto, para o caso particular da primeira expressão, consegue concluir facilmente que o resultado da adição sucessiva tem alguma semelhança com a multiplicação de números naturais, embora com um resultado negativo:

> Aí eu tive um pouco mais de dificuldade, mas eu consegui fazer. O menos três estava a repetir-se cinco vezes, eu coloquei menos três, mais menos três e assim sucessivamente até dar vezes cinco, que é quinze. Três vezes cinco é quinze, negativo. (Pedro) (E4)

Tatiana, na questão *c*, generaliza para os números inteiros a regra encontrada na questão b, a partir de uma propriedade já conhecida para o conjunto dos números naturais:

> Contei o número de vezes que se repete e depois multipliquei pelo número. (Tatiana) (E2)

Na questão *f*, a grande maioria dos alunos obtém as regras pretendidas, em particular no que respeita ao sinal do resultado. Bruno, além de indicar o sinal do resultado, refere ain-



f. Tenta encontrar uma regra que permita determinar a multiplicação de dois números inteiros se forem:

i. Ambos positivos

multiplicamos os dois numeros positivos e vai dar um numero positivo

ii. Um negativo e um positivo

multiplicamos os dois numeros e vai dar negativo

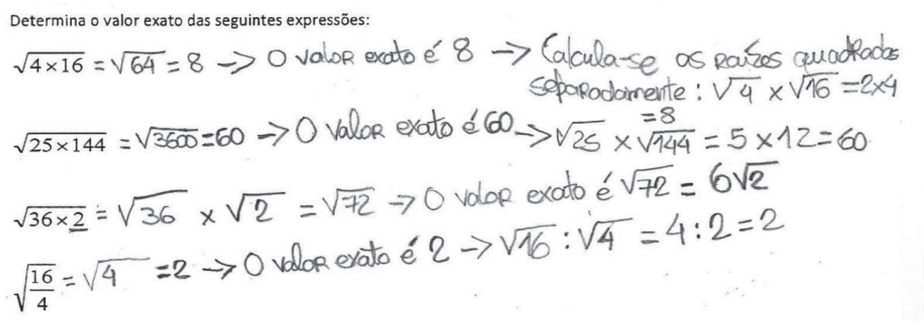
iii. Ambos negativos

multiplicamos os dois números e vai dar positivos

Figura 8.—Resolução de Bruno da questão *f*

da a «multiplicação de ambos os números» (figura 8) que tem subjacente a noção de valor absoluto dos números em questão.

Pedro e Tatiana, na questão *c*, utilizam alguns tratamentos na linguagem simbólica durante a sua resolução inicial e realizam com facilidade conversões entre a linguagem simbólica e a linguagem natural oral. Já na sua resposta na questão *f*, Bruno utiliza apenas linguagem natural escrita, não realizando transformações entre representações. Nestas questões, os alunos utilizam generalizações baseadas essencialmente em propriedades matemáticas conhecidas, ainda que muitas vezes não as explicitem. Em particular, na questão *f*, os alunos parecem recorrer a propriedades já conhecidas para o conjunto dos números naturais, ao conceito de valor absoluto de um número, ainda que não o evidenciem, e também a regras práticas que já conhecem da simplificação de expressões numéricas envolvendo adições e subtrações (ao referirem, por exemplo, que «menos com menos vai dar mais» (Bruno) E3). Considerando as ausências de justificação para as generalizações obtidas, os processos de significação parecem ser de algum modo incompletos, sugerindo uma compreensão reduzida das generalizações obtidas. Na questão *c*, os alunos generalizam com facilidade a propriedade da multiplicação enquanto adição sucessiva dos números naturais para os números inteiros, estabelecendo conexões entre as propriedades nestes dois conjuntos. Na questão *f*, parecem estabelecer conexões entre as regras práticas já utilizadas e a multiplicação de números inteiros. Um dos alunos (Bruno) estabelece ainda conexões entre a multiplicação de números naturais e a multiplicação de números inteiros utilizando o valor absoluto. Todas estas conexões parecem ser feitas de um modo imediato e pouco consciente, o que leva os alunos a generalizações válidas, mas também a uma compreensão reduzida dessas mesmas generalizações.



Determina o valor exato das seguintes expressões:

$\sqrt{4\times16} = \sqrt{64} = 8 \rightarrow$ O valor exato é 8 $\rightarrow$ Calcula-se os raízes quadradas separadamente: $\sqrt{4} \times \sqrt{16} = 2\times4 = 8$

$\sqrt{25\times144} = \sqrt{3600} = 60 \rightarrow$ O valor exato é 60 $\rightarrow \sqrt{25} \times \sqrt{144} = 5\times12 = 60$

$\sqrt{36\times\underline{2}} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \sqrt{72} \rightarrow$ O valor exato é $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow$ O valor exato é $2 \rightarrow \sqrt{16} : \sqrt{4} = 4:2 = 2$

Figura 9.—Resolução de Gustavo da questão 1

9.º ano

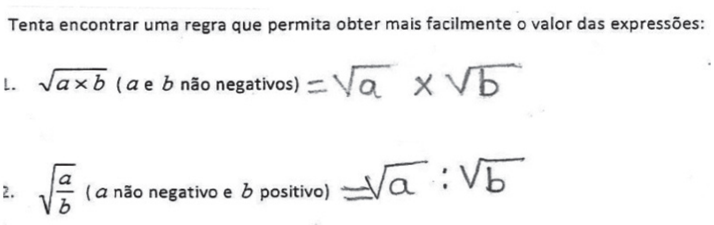
No 9.º ano, os processos de generalização utilizados na resolução da tarefa sobre números reais são visíveis essencialmente nas questões 2 e 4. Na questão 2 é solicitada uma generalização de uma propriedade da multiplicação de raízes quadradas. Na questão 4 é apresentada uma generalização que deve ser identificada pelos alunos como não sendo válida.

Algumas das generalizações dos alunos são baseadas em casos particulares, nomeadamente casos já utilizados em questões anteriores. Na questão 2, Iris mostra dificuldade na compreensão do enunciado, referindo primeiramente uma resposta que salienta apenas a informação dada de que a e b são não negativos, sendo conduzida pela investigadora a analisar novamente o enunciado, enfatizando a utilização da questão anterior. Nesta questão, a aluna encontra um processo alternativo para encontrar o resultado:

> Iris:Então, a raiz quadrada de quatro … Dois.
>
> Iris: A raiz quadrada de dezasseis, a raiz quadrada de dezasseis, é oito … Não é oito, também não é oito! (…) É quatro. (…) Quatro vezes dois, oito. (A1)

Depois de encontrar uma alternativa para resolver as alíneas da questão 1 em que a aplicação direta de procedimentos de cálculo já não é suficiente, Iris tem facilidade em relacionar a questão 1 com o que é solicitado na questão 2, ainda que esta última envolva já a linguagem simbólica com variáveis:

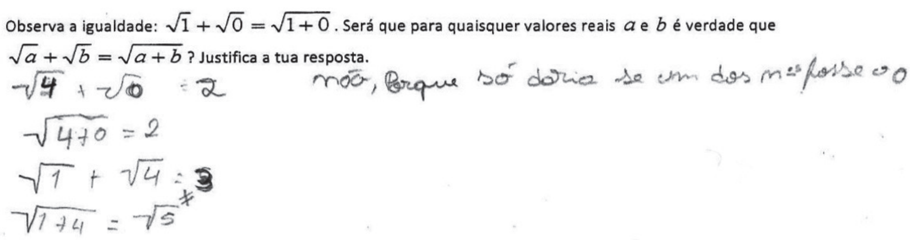
> Então, se … Raiz quadrada de a vezes raiz quadrada de b … É igual à raiz quadrada de a vezes b. (Iris) (A1)


Tenta encontrar uma regra que permita obter mais facilmente o valor das expressões:

1. $\sqrt{a\times b}$ (a e b não negativos) $= \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (a não negativo e b positivo) $= \sqrt{a} : \sqrt{b}$

Figura 10.—Resolução de Gustavo da questão 2


Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

$\sqrt{4} + \sqrt{0} = 2$ não, porque só daria se um dos nºs fosse o 0

$\sqrt{4+0} = 2$

$\sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$

$\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Figura 11.—Resolução de Afonso da questão 4

Gustavo, após realizar a questão 1, tem facilidade em encontrar um processo alternativo para a sua resolução, sem intervenção da professora nem da investigadora (figura 9). Apesar de estar claramente a responder à questão 1, utiliza já uma generalização em linguagem natural para o processo utilizado dado que não refere o caso particular das raízes quadradas de quatro e de oito, indicando apenas raízes quadradas em geral. Na questão 2, o aluno tem facilidade em converter para linguagem simbólica com variáveis a generalização que obteve na questão 1 (figura 10).

Na questão 4, utilizando a igualdade dada e um caso particular adicional, Afonso formula uma generalização sobre quais as situações em que a expressão dada é válida (figura 11).

Na passagem da questão 1 para a 2, os alunos mostram facilidade na conversão de linguagem simbólica sem variáveis para linguagem simbólica com variáveis. Na questão 1, Gustavo realiza também com facilidade e por iniciativa própria, a conversão entre linguagem simbólica sem variáveis e linguagem natural escrita. Deste modo, Gustavo parece estar mais à vontade nas conversões entre diversas representações. Na questão 2, os alunos formulam a generalização pretendida recorrendo aos casos particulares utilizados na questão anterior. Para Gustavo esta generalização é imediata, mas Iris inicialmente tem dificuldades, muito provavelmente por não interpretar o significado de «regra» no contexto da situação. Na questão 4, Afonso formula uma generalização que não era pedida

Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$ **. Será que para quaisquer valores reais** a **e** b **é verdade que** $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ **? Justifica a tua resposta.**

Não, porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão.

Figura 12.—Resolução de Iris da questão 4

na questão, mas que advém de casos particulares que utilizou para verificar a validade da generalização pretendida. Os três alunos evidenciam nestas questões uma compreensão da situação através das conexões estabelecidas. Na questão 2 estabelecem conexões entre os casos particulares apresentados na questão anterior e a expressão algébrica apresentada nesta questão e o conceito de regra matemática. A falha nesta última conexão leva a uma dificuldade inicial para Iris, posteriormente superada. Na questão 4, Afonso estabelece conexões entre a igualdade numérica e a expressão algébrica apresentadas no enunciado, algumas propriedades dos números reais e alguns casos particulares que constrói partindo da expressão algébrica dada no enunciado.

Ainda que a utilização de casos particulares seja o processo mais utilizado para a formulação de conjeturas, em algumas situações os alunos mobilizam propriedades matemáticas já conhecidas. Por exemplo, na questão 4, Iris responde impulsivamente baseando-se na propriedade da multiplicação de raízes quadradas que obteve na questão 2, sendo posteriormente guiada a rever a sua resposta:

> Iris: (lê o enunciado da pergunta 4) Sim! É sim.
>
> Investigadora: (aguardando algum tempo para que aluna completasse a sua resposta, o que não fez) Experimenta lá.
>
> Iris: É, porque foi o que nós fizemos aqui (referindo-se à questão 2)
>
> Investigadora: É a mesma coisa? Experimenta.
>
> Iris: Cá para mim é só com vezes. (Escreve o exemplo que experimenta enquanto fala) Raiz de 16 mais raiz de quatro dá 6. Agora, vinte … Pois, não vai dar, era suposto dar raiz de 36. (apaga o exemplo). Então, não porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão (figura 12). (A1)

Nesta questão, Iris utiliza primeiramente apenas a linguagem natural oral, complementando-a posteriormente com a linguagem simbólica sem variáveis, realizando assim conversões entre estas duas representações. Na utilização conjunta destas representações, a aluna realiza ainda tratamentos em cada uma das linguagens. Apesar de, numa primeira fase, a aluna validar erradamente a generalização, utiliza propriedades matemáticas conhecidas da questão 2 para o fazer. Com alguma intervenção, a aluna consegue detetar o seu erro, recupera a mesma propriedade e utiliza o caso particular que selecionou para formular outra generalização em que inclui implicitamente propriedades das quatro operações no conjunto dos números reais. Nesta questão, a aluna, ao formular uma generalização para uma propriedade da raiz quadrada nas várias operações, estabelece conexões entre o caso particular que utiliza, as propriedades obtidas nas questões anteriores e a subtração enquanto caso particular da adição. Deste modo, demonstra uma boa compreensão da situação que deriva dos processos de significação que utiliza.

Justificação

7.º ano

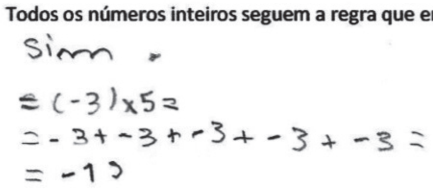
Nas justificações que apresentam para as suas resoluções, os alunos baseiam-se por vezes na autoridade, perceção, senso comum ou exemplos, o que compromete a validade das suas justificações. Por exemplo, na alínea *f*, Bruno, apesar de ter facilidade em encontrar o sinal para o resultado da multiplicação, utiliza conceitos para justificar a sua resposta que não se adequam à situação ou invoca relações matemáticas demasiado vagas:

> Bruno: Em ambos os números negativos, multiplicamos os dois números e vai dar positivo.
>
> Investigadora: Ok, quando são os dois negativos vai dar positivo, porquê?
>
> Bruno: Porque menos com menos vai dar mais.
>
> (…)
>
> Investigadora: Porque é que tu achaste que podias utilizar essas regras (referindo-se às regras de sinais utilizadas anteriormente na simetria de números inteiros) para a multiplicação?
>
> Bruno: Porque a multiplicação é como se tivesse a somar o número de vezes o número. Esta aqui, cinco vezes três, é a mesma coisa que estarmos a somar menos três, mais menos três, mais menos três...
>
> (…)
>
> Investigadora: Podíamos usar umas regras que não eram daqui, também para aqui? Achas-te natural isso funcionar para aqui também?
>
> Bruno: Eu achei natural.
>
> Investigadora: Porquê?
>
> Bruno: A Matemática também está toda ligada! (E3)

Na última pergunta colocada na questão *f*, Pedro justifica que a generalização pode ser validada a partir de um grande número de casos particulares:

> Porque é a regra geral. Podemos ficar a vida toda fazendo isso, qualquer número ia dar essa regra. (Pedro) (E4)

Bruno, também nesta última pergunta da questão *f*, apresenta apenas um exemplo para um caso particular respeitante à segunda alínea (figura 13).


Todos os números inteiros seguem a regra que encontraste? Investiga.

Sim.

= (-3)x5 =

= -3 + -3 + -3 + -3 + -3 =

= -15

Figura 13.—Resolução de Bruno da última pergunta da questão f

Além de limitar a sua investigação a um caso particular, o aluno assume a generalização como verdadeira sem sentir efetivamente necessidade de a justificar:

> Investigadora: Então e ali em vez de estar um três e um cinco estivesse outro número?
>
> Bruno: Era igual.
>
> Investigadora: Qualquer número? Funcionava para qualquer número?
>
> Bruno: Sim.
>
> Investigadora: Porquê?
>
> (…)
>
> Bruno: Oh, porque tinha que dar, é assim, se os outros dão … estes também tinham que dar … (E3)

Com exceção de Bruno, que utiliza na sua resposta à última pergunta da questão *f* um exemplo em linguagem simbólica, os alunos utilizam apenas a linguagem natural oral ou escrita para as suas justificações. Nestas justificações às questões apresentadas, os alunos utilizam ou o senso comum ou exemplos ou simplesmente a sua perceção da situação. Estas justificações remetem para uma incompreensão parcial da situação, em que os alunos, apesar de terem uma ideia correta, não estabelecem as conexões necessárias para a justificar de um modo matematicamente válido.

Ideias já compreendidas anteriormente, quando apresentadas de forma clara, podem também constituir justificações válidas. Nas justificações para as suas respostas às primeiras duas alíneas da questão *f*, Pedro refere:

> Pedro: A primeira foi fácil, porque já tínhamos feito já há muito tempo. Ambos positivos. Eu coloquei um exemplo, quatro vezes quatro, dezasseis. Portanto, se multiplicarmos um positivo com um positivo ia dar positivo.
>
> Investigadora: E um negativo com um positivo?
>
> Pedro: Negativo. Fiz um exemplo, mas aí eu também pensei na soma. Um negativo com um positivo ia dar negativo, portanto, menos três mais menos três ia dar menos seis. (E4)

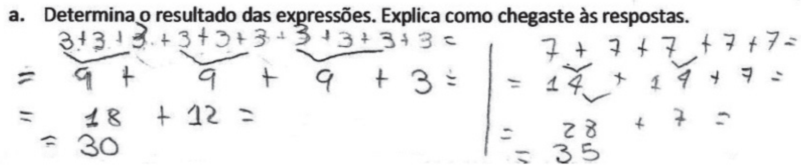


Figura 14.—Resolução de Tatiana da questão a

Na sua resolução na folha de respostas, Pedro utiliza a linguagem natural escrita para apresentar as suas generalizações e a linguagem simbólica sem variáveis para apresentar um exemplo em cada alínea. Assim, ao apresentar a sua justificação para as respostas dadas, Pedro realiza conversões entre a linguagem simbólica sem variáveis e a linguagem natural oral. Nestas primeiras alíneas da questão *f*, Pedro utiliza para as suas justificações conhecimentos anteriores, propriedades matemáticas utilizadas nas questões anteriores e apresenta também um exemplo em cada alínea, testando assim a sua conjetura, ainda que para um caso particular. Neste sentido, Pedro desenvolve uma compreensão clara da situação em questão ao ser capaz de articular propriedades de vários conjuntos numéricos, as generalizações pretendidas e os casos particulares que seleciona.

Outra situação que pode promover o desenvolvimento de justificações válidas é a utilização de argumentos válidos, como conceitos ou propriedades conhecidas. Na questão *a*, Tatiana apresenta uma estratégia em que recorre à propriedade associativa da adição, ainda que a represente informalmente (figura 14).

Na mesma questão, Pedro usa uma outra estratégia e explica do seguinte modo o processo que utilizou:

> Eu usei a multiplicação, como repetiu-se muitas vezes, eu fiz a maneira mais rápida. Aqui, o três repetiu-se dez vezes, fiz três vezes dez, deu trinta. O sete repetiu-se cinco vezes, é trinta e cinco. (Pedro) (E4)

Nas questões *c*, *d* e *e*, todos os alunos começam por recorrer à adição sucessiva para encontrarem o resultado das expressões (Figuras 15 e 16).

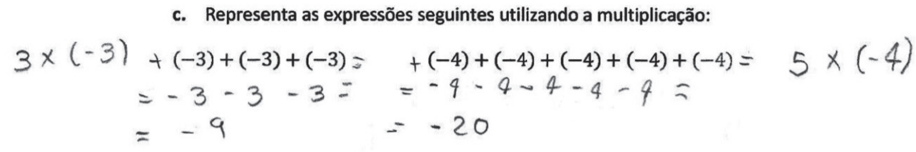
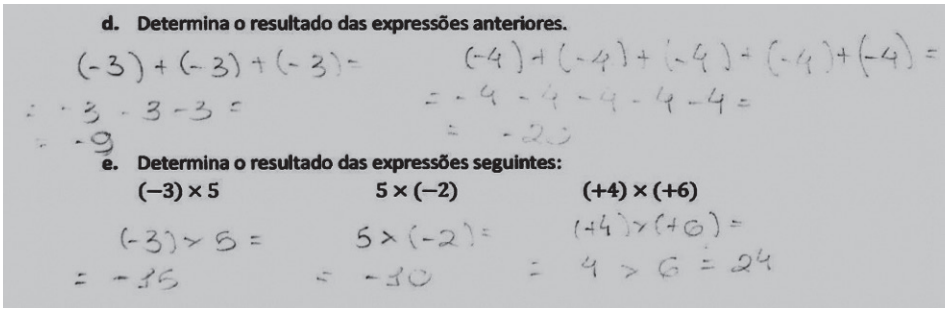


Figura 15.—Resolução de Tatiana das questões *c* e *d*



d. Determina o resultado das expressões anteriores.

$(-3)+(-3)+(-3)=$
$= -3-3-3=$
$= -9$

$(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)=$
$= -4-4-4-4-4=$
$= -20$

e. Determina o resultado das expressões seguintes:

(−3) × 5 **5 × (−2)** **(+4) × (+6)**

$(-3)\times 5=$
$= -15$

$5\times(-2)=$
$= -10$

$(+4)\times(+6)=$
$= 4\times 6 = 24$

Figura 16.—Resolução de Pedro das questões *d* e *e*

Nestas questões, os alunos justificam as suas resoluções explicitando a estratégia utilizada. Por exemplo, Pedro refere a ter adicionado as parcelas duas a duas e Bruno, apensar de utilizar também a adição sucessiva, usa ainda exemplos concretos para os números negativos:

> Aqui, como era a primeira conta de multiplicação negativa que eu tinha feito, eu usei a soma e eu fiz dois a dois e aqui no final eu já coloquei logo o resultado. (Pedro) (E4)

> Estávamos no piso menos quatro e tínhamos que descer mais oito vezes, não, dezasseis vezes. (Bruno) (E3)

Na última alínea da questão *f*, Pedro utiliza uma justificação apropriada para a sua resposta, baseando-se em propriedades conhecidas, ainda que ao expressar-se o faça de um modo algebricamente pouco formal:

> Investigadora: E se fossem os dois negativos?
>
> Pedro: Eu pensei na soma também, como são os dois negativos, o quatro vai repetir-se seis vezes, como é menos seis, seria o simétrico de seis, aí eu somei. Com o simétrico de menos quatro é quatro, eu somei quatro mais quatro mais quatro...que deu vinte e quatro.
>
> (…)
>
> Investigadora: Ok. Como é que lembraste do simétrico?
>
> Pedro: Como é menos seis e o menos é o símbolo da simetria, eu pensei mais foi nisso. (E4)

O aluno revela nesta questão um processo de raciocínio que se pode traduzir nos seguintes passos (figura 17).

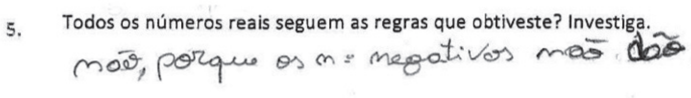
$$\begin{aligned}(-4)\times(-6) &= (-4)\times[-(+6)]\\ &= -(-4)\times 6\\ &= -[(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)+(-4)]\\ &= -(-24)\\ &= 24\end{aligned}$$

Figura 17.—Processo utilizado por Pedro na última alínea da questão *f*

Nas suas resoluções das questões *a*, *b*, *c*, *d* e *e* os alunos utilizam tratamentos na representação em linguagem simbólica. Na questão *f*, Pedro utiliza a linguagem natural escrita para representar a generalização pretendida e a linguagem simbólica sem variáveis para representar o seu exemplo. Quando lhes é pedido para justificarem as suas respostas, os alunos fazem-no utilizando a linguagem natural oral, mostrando facilidade nas conversões entre a linguagem utilizada nas resoluções e a linguagem natural oral. Os alunos apresentam nas primeiras questões justificações apropriadas e completas, aplicando procedimentos de cálculo simples e utilizando tendencialmente a linguagem simbólica para justificar as suas respostas durante a resolução da tarefa. Para estas justificações os alunos utilizam propriedades conhecidas, como a propriedade associativa da adição ou a propriedade da multiplicação como uma adição sucessiva e utilizam também factos conhecidos, como resultados da multiplicação. Ainda que os processos de significação nestas questões representem maioritariamente conexões entre os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros, os alunos desenvolvem esses processos proficuamente. Na última justificação de Pedro, o aluno recorre a propriedades e conceitos que já conhecia sobre o simétrico de um número inteiro, o que é de sublinhar visto tratar-se de um aluno no início do 3.º ciclo. Considerando que o aluno não conhece a linguagem simbólica com variáveis, o facto de utilizar apenas um exemplo para a sua justificação é aqui pouco relevante, salientando-se as relações que o aluno estabelece com os conceitos já conhecidos e uma situação nova para a qual não existia a priori nenhum caso particular a partir do qual o aluno pudesse induzir a sua generalização.

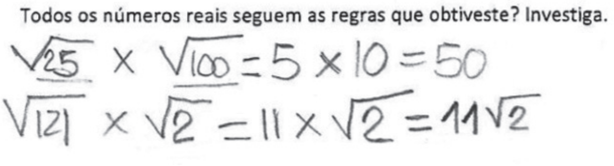
9.º ano

No 9.º ano, parte das justificações apresentadas pelos alunos são válidas por se basearem em ideias já compreendidas anteriormente. Na questão 3, Iris e Afonso, justificam a sua resposta de acordo com os resultados obtidos para a questão 2, dado que nesta questão já haviam justificado as afirmações referentes às propriedades de *a* e de *b*. Afonso responde de imediato que com os números negativos a regra não é válida (figura 18).


5. Todos os números reais seguem as regras que obtiveste? Investiga.

não, porque os n.º negativos não dão

Figura 18.—Resolução de Afonso da questão 3


Todos os números reais seguem as regras que obtiveste? Investiga.

$\sqrt{25} \times \sqrt{100} = 5 \times 10 = 50$

$\sqrt{121} \times \sqrt{2} = 11 \times \sqrt{2} = 11\sqrt{2}$

Figura 19.—Resolução do Gustavo da questão 3

Iris, apesar de numa primeira fase responder impulsivamente à pergunta, justifica a sua resposta com o conceito utilizado na questão anterior:

> Iris: (lê o enunciado da pergunta 3) Sim.
>
> Investigadora: Porque …
>
> Iris: Não, porque os reais podem ser negativos. Então é não, nem é sim.
>
> Investigadora: Então e se os números reais forem negativos, porque é que a regra não funciona?
>
> Iris: Porque não existe a raiz quadrada de números negativos. (A1)

Nesta questão, os alunos utilizam para a sua resposta apenas a linguagem natural (escrita ou oral). Não sentem necessidade de alargar a sua justificação visto já terem utilizado a mesma ideia numa questão anterior, desenvolvendo assim uma justificação válida e suficiente. Nesta justificação, ao estabelecerem a relação entre a questão 3 e a questão anterior, os alunos criam um contexto de complexidade reduzida, promovendo uma rápida compreensão da situação.

A justificação, quando se refere a uma generalização não válida como a proposta na questão 3, pode também basear-se num contraexemplo. Contudo, encontrar esse contraexemplo pode passar pelo teste de vários casos particulares com características distintas. Gustavo, considerando que não lhe foi pedido anteriormente para justificar as afirmações referentes às propriedades de *a* e de *b* na questão 2 e que não sentiu necessidade de considerar tais afirmações na resolução da questão, utiliza alguns casos particulares para a questão 3 (figura 19).

A seleção destes casos não é aleatória, o que revela uma tentativa por parte do aluno de incluir uma variedade de casos que permita a validação da generalização sugerida:

> Esse fiz um quadrado de quadrados perfeitos, 100, 25, cinco vezes cinco, dez vezes dez, e fiz um com um quadrado perfeito e um sem ser (Gustavo) (A1)

Contudo, dado que o aluno considera estes casos suficientes, é-lhe sugerido que inclua números negativos na sua seleção. Gustavo tem dificuldade em utilizar o conceito de raiz quadrada de um número negativo no conjunto dos números reais:

> Gustavo: Com um negativo acho que ia acontecer o mesmo. (experimenta na calculadora raiz de –25)
>
> Investigadora: Existe raiz quadrada de um número negativo?
>
> Gustavo: Pois … Não.
>
> (…)
>
> Investigadora: Então isto é valido para todos os reais? Esta regra?
>
> Gustavo: Não, é só para os reais positivos. (A1)

Na questão 3, para os alunos que exploraram as propriedades de *a* e de *b* na questão anterior, como Iris e Afonso, a resolução foi imediata e foi suficiente a utilização da linguagem natural. Gustavo, visto que não explorou as propriedades de *a* e de *b* na questão anterior, utiliza casos particulares expressos em linguagem simbólica sem variáveis, ainda que não apresente todos os tratamentos que seriam necessários para testar a regra para esses casos. É interessante verificar que Gustavo não seleciona aleatoriamente os casos que integra na sua solução, mostrando uma preocupação em abranger diversas propriedades dos números em questão. Contudo, nesta seleção, necessita de alguma intervenção para abranger mais alguns casos particulares que seriam essenciais para a validação ou não validação da generalização em questão. Assim, a justificação inicial de Gustavo é incompleta e não válida por se basear apenas em casos particulares, mas destaca-se a inclusão de vários fatores na sua tentativa de justificação. A sua justificação final é já baseada num contraexemplo. Nesta questão, Gustavo estabelece conexões entre propriedades dos números reais e a influência que tais propriedades podem ter na resolução de operações com raízes, contudo não articula estes conceitos com o enunciado da questão e com todas as características que deveriam ser salientadas, o que o leva a obter uma justificação inicial bastante incompleta. Em situações semelhantes à anterior, os alunos, mesmo conseguindo encontrar um contraexemplo que valida a justificação, têm dificuldade em considerar esse contraexemplo.

Na questão 4, Gustavo, ainda que numa primeira fase não consiga resolver a questão por não considerar o que era solicitado, utiliza um caso particular para verificar a generalização pretendida, concluindo a partir deste caso que a generalização não é verdadeira. Contudo, tem dificuldade em apresentar uma justificação para a sua conjetura, não assumindo o contraexemplo obtido como suficiente:

Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

$\sqrt{2}+\sqrt{121}=12.4$

$\sqrt{2+121}=\cancel{11.03}\,11.1$

Não. Não é verdade que a regra se adequa a quaisquer valores reais porque com o exemplo dado não se verificou essa igualdade.

Determina o valor exato da área e do perímetro de cada uma das figuras:

Figura 20.—Resolução de Gustavo da questão 4

Gustavo: E agora explicar porquê …

Investigadora: Então, como é que tu sabes que não é verdade? Convence-me lá que não é verdade.

Gustavo: (rindo) A calculadora convence-a.

Investigadora: Não experimentaste? Aquilo que tu tens chama-se contraexemplo, ou seja, tens um exemplo onde ela não é verdade, se não é verdade para este exemplo em particular, aqui pergunta para qualquer valor real, então também não é verdade para qualquer valor real, pode ser para alguns, como é o caso do zero e do um onde por acaso é verdade, mas não é para qualquer. Portanto, eu não posso escolher dois valores reais quaisquer e dizer que esta regra é verdadeira, porque não é verdade.

Gustavo: É só isso?

Investigadora: É só isso, é só explicares isso. (A1)

Após esta intervenção da investigadora, Gustavo justifica com o contraexemplo dado a sua resposta (Figura 20).

Iris, nesta questão e também numa segunda fase da sua resolução, utiliza um caso particular para verificar a generalização pretendida. Contudo, considerando que o caso particular que experimenta poderia ser utilizado como contraexemplo para justificar a sua resposta final, a aluna não o utiliza (figura 21).

Observa a igualdade: $\sqrt{1}+\sqrt{0}=\sqrt{1+0}$. Será que para quaisquer valores reais a e b é verdade que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$? Justifica a tua resposta.

Não, porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão.

Figura 21.—Resolução de Iris da questão 4

> (Escrevendo o exemplo que experimenta enquanto fala) Raiz de 16 mais raiz de quatro dá 6. Agora, vinte … Pois, não vai dar, era suposto dar raiz de 36. (Apaga o exemplo). Então, não porque a regra só resulta com a multiplicação e a divisão. (Iris) (A1)

Afonso, tal como os colegas, não assume a necessidade de utilizar o contraexemplo para justificar a sua resposta, ainda que, ao contrário de Gustavo, consiga identificar um caso particular como suficiente para refutar uma afirmação na discussão com uma colega:

> Investigadora: Então, essa regra é verdade?
>
> Afonso e Débora: Não.
>
> Débora: Aqui é (referindo-se à igualdade do enunciado), mas aqui não (referindo-se ao segundo caso particular que Afonso utilizou).
>
> Afonso: Não, aqui é um exemplo. (A1)

No que respeita às representações utilizadas, os alunos utilizam maioritariamente a linguagem simbólica sem variáveis para testar a regra apresentada, ainda que utilizem a linguagem natural escrita para expressarem as suas respostas finais. Gustavo mostra algumas dificuldades na conversão da linguagem simbólica com variáveis para a linguagem simbólica sem variáveis na primeira fase da sua resolução, ainda que em questões anteriores tenha mostrado facilidade na conversão inversa. Nesta questão os alunos encontram com alguma facilidade um contraexemplo para a generalização pedida. Contudo, apesar de desenvolverem alguma compreensão da situação, os alunos nunca utilizam por iniciativa própria o contraexemplo como justificação das suas conjeturas, ou por não o assumirem como justificação suficiente ou por o considerarem desnecessário à justificação. A validade das justificações pode ainda ser baseada em argumentos válidos resultantes da utilização de conceitos ou propriedades conhecidas.

Na questão 2, após a resposta dada pelos alunos, é solicitado a Iris e a Afonso que justifiquem o porquê da afirmação «a e b não negativos», que os alunos não sentem à partida necessidade de justificar. Iris tem inicialmente alguma dificuldade em articular esta justificação, aparentemente não por desconhecimento dos conceitos necessários, mas por formular uma primeira justificação que se resume matematicamente a uma redundância.

> Iris: Ah, pois, também temos de explicar isso!
>
> (…)
>
> Iris: E eu tinha explicado aqui … Não podem ser negativos porque são positivos.
>
> Investigadora: Mas a minha pergunta é, porque é que têm de ser não negativos?
>
> Iris: Porque podem ser zero.
>
> Investigadora: Também podem ser zero … E se eles fossem negativos o que é que ia acontecer?

(Iris experimenta $\sqrt{-16}$ na calculadora)

INVESTIGADORA: Há raízes de números negativos?

IRIS: Não … Então está-nos a enganar!

INVESTIGADORA: Não vos estou a enganar, só quero é perceber porque é que não podem ser negativos.

IRIS: Não podem ser negativos porque têm a raiz quadrada! Espere aí … (escreve) «não existe a raiz quadrada de números negativos» (A1)

Iris mostra igualmente alguma inconsistência no conceito de raiz quadrada no conjunto dos números reais, não tendo presente que não poderá concretizar a raiz quadrada de um número negativo. Também Afonso parece ter uma dificuldade semelhante, sendo uma colega que a salientar que não é possível, no conjunto dos números reais, obter a raiz de um número negativo:

INVESTIGADORA: E agora explica-me só porque é que eles salientam que o *a* e o *b* são não negativos.

AFONSO: Porque também pode ser o zero.

INVESTIGADORA: Também pode ser o zero, e podem ser os negativos?

AFONSO: Não.

INVESTIGADORA: Porque é que não podem ser os negativos?

AFONSO: Porque é a raiz quadrada.

INVESTIGADORA: E …

(Afonso mantém-se em silêncio)

INVESTIGADORA: Quanto é que é a raiz quadrada de um número negativo?

AFONSO: Raiz quadrada de um número negativo …

DÉBORA: Então, não dá para fazer! (A1)

Contudo, quando é solicitado a Iris e a Afonso que justifiquem o porquê de o *b* não poder ser zero, os alunos mobilizam conhecimentos anteriores com facilidade e articulá-los com a situação:

IRIS: Porque o *a* pode ser zero e o *b* não pode ser zero.

INVESTIGADORA: Porque é que o b não pode ser zero?

IRIS: Porque é positivo. É positivo porque não é zero, porque está aqui em baixo.

INVESTIGADORA: E agora diz-me lá porque é que o *a* é não negativo e o *b* é positivo.

AFONSO: Porque não se pode dividir um número por zero. (A1)

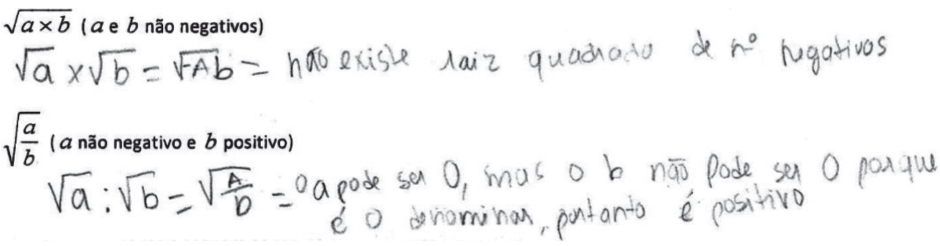


Figura 22.—Resolução de Iris da questão 2

Salienta-se nestas justificações a articulação de Iris entre a linguagem oral e a linguagem escrita (figura 22). Na linguagem oral a aluna refere «está aqui em baixo» e na linguagem escrita refere «é o denominador».

Para as justificações que são solicitadas a Iris e Afonso, os alunos utilizam apenas a linguagem natural para as exprimirem. Em particular, salienta-se que Iris, na segunda justificação, mostra uma maior formalidade na linguagem natural escrita que na linguagem natural oral, ao referir oralmente «porque está aqui em baixo» e escrever «porque é o denominador». Nas primeiras justificações, as dificuldades em estabelecer conexões entre as propriedades dos números dados e a raiz quadrada de um número, leva os alunos a não conseguir justificar a afirmação. Contudo, quando é esclarecida tal conexão, os alunos utilizam esse argumento para validar a sua justificação. Nas segundas justificações, os alunos não encontram dificuldades em estabelecer conexões entre as propriedades dos números e dos denominadores, utilizando assim argumentos válidos para a justificação da afirmação.

Conclusão

As tarefas apresentadas aos alunos, tendo por objetivo a exploração de propriedades dos números inteiros e dos números reais, permitem aos alunos do 7.º ano investigar diferenças e semelhanças entre propriedades da multiplicação de números naturais e inteiros e no 9.º ano, diferenças entre as propriedades de várias expressões envolvendo as quatro operações e a raiz quadrada no conjunto dos números reais.

Na formulação de generalizações sobre estas propriedades, tanto no 7.º como no 9.º ano, grande parte dos alunos segue uma abordagem indutiva, generalizando as relações observadas em casos particulares para uma classe de objetos mais ampla. Contudo, no 7.º ano, os processos de significação envolvidos nas generalizações realizadas pelos alunos indiciam também conexões com propriedades e/ou conceitos conhecidos, não podendo ser resumidas a uma relação direta entre os casos particulares e um caso geral e sugerindo, portanto o uso de raciocínio abdutivo. Apenas uma aluna evidencia uma grande dificuldade em articular em linguagem verbal uma generalização que mostra compreender usando casos particulares.

Já nos alunos do 9.º ano a utilização da Álgebra, através da linguagem simbólica com variáveis, torna as conexões com propriedades e conceitos menos visíveis, sendo a generalização mais imediata que no 7.º ano. Além das situações em que os alunos utilizam uma abordagem empírica para a formulação de generalizações, surgem também, ainda que com menor frequência, generalizações de cunho mais dedutivo, baseadas em propriedades matemáticas suas conhecidas. Tais generalizações, ao basearem-se mais em propriedades do que em casos particulares, revelam uma maior capacidade de raciocínio dos alunos visto que estabelecem conexões de maior complexidade.

Contudo, os alunos não justificam a utilização dessas propriedades na maioria das situações, o que sugere existirem ainda lacunas na sua compreensão. Deste modo, tanto nos alunos do 7.º como do 9.º ano, é possível distinguir entre situações em que a generalização é formulada com base em casos particulares e com base em propriedades conhecidas, à semelhança da distinção apresentada por Galbraith (1995) entre abordagens empíricas e dedutivas.

Tal como sugerem Lannin, Ellis e Elliot (2011), as tarefas apresentadas, sendo de cunho exploratório, revelam potencialidades para que os alunos justifiquem as suas conjeturas, nomeadamente as suas generalizações. Contudo, os alunos nem sempre sentem necessidade de justificar as suas respostas ainda que, nalguns casos, quando lhes é solicitado, consigam identificar as propriedades e conceitos necessários para a justificação. Deste modo, as justificações que apresentam decorrem maioritariamente do questionamento da professora ou da investigadora, não surgindo espontaneamente durante a realização das tarefas, tal como se tem verificado em numerosos trabalhos anteriores (Ponte, 2007). No 7.º ano, alguns alunos parecem não dar relevância às características necessárias a uma justificação para que esta seja válida, apresentando justificações que se baseiam em casos particulares ou na sua perceção da situação. Alguns alunos apresentam justificações válidas para as questões apresentadas, ou por se basearem em conceitos ou propriedades compreendidos anteriormente ou por utilizarem argumentos válidos para a situação em questão, destacando-se a justificação de Pedro para a questão f, em que mobiliza conhecimentos anteriores e justifica a sua resposta com base em propriedades e conceitos matemáticos válidos na situação. Verifica-se portanto que, mesmo no início do 3.º ciclo, é possível aos alunos elaborar eficazmente justificações com algum grau de complexidade.

No 9.º ano, os alunos parecem ter alguns cuidados na justificação das suas respostas, nomeadamente quanto à seleção não aleatória de casos a testar para obter generalizações e quanto à não utilização isolada de casos particulares ou perceções da situação. Tal como os alunos de 7.º ano, também os do 9.º apresentam justificações baseadas em conhecimentos anteriores e baseadas em argumentos válidos. As justificações que se destacam no 9.º ano dizem respeito à utilização de contraexemplos para refutar uma afirmação. Nestas situações, os alunos conseguem com alguma facilidade obter os contraexemplos necessários, mas nem sempre os consideram necessários ou suficientes para a comprovar a refutação de uma conjetura. Contudo, ao contrário da dificuldade dos alunos identificada por Galbraith (1995), os contraexemplos utilizados pelos alunos nesta tarefa satisfazem as condições dadas e violam as conclusões pretendidas. De acordo com os resultados apresentados, é possível distinguir entre situações em que os alunos não apresentam justificações válidas por se basearem na autoridade, em perceções ou em casos particulares e situações em que as justificações apresentadas são válidas por utilizarem (i) conhecimentos anteriores, (ii) propriedades ou conceitos matemáticos, ou (iii) contraexemplos que refutem a afirmação.

Nestas tarefas, os alunos não apresentam dificuldades significativas nas transformações entre representações, sejam tratamentos ou conversões. Assim, a utilização de diferentes representações não parece limitar o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Já os processos de significação surgem intrinsecamente ligados às generalizações ou justificações apresentadas na medida em que, quando há dificuldades na generalização ou justificação, parece igualmente existir uma dificuldade nas conexões entre os conceitos e propriedades necessários à consecução da tarefa.

O presente artigo apresenta um quadro original para o estudo do raciocínio matemático dos alunos, destacando a importância da generalização e da justificação nos raciocínios indutivo, abdutivo e dedutivo e mostra a sua utilidade no estudo dos processos de raciocínio. Com base neste quadro mostra como alguns alunos são capazes de realizar certas generalizações e justificações. Em particular, mostra a capacidade de por vezes usarem contraexemplos de modo mais sofisticado que o apontado pela literatura. Além disso, resultados deste estudo sugerem que os objetivos de aprendizagem relativos ao raciocínio matemático enunciados no programa (ME, 2007) são pertinentes pois as tarefas apresentadas promoveram situações que contribuíram para que os alunos atinjam os objetivos curriculares propostos. Contudo, para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, o professor tem de selecionar criteriosamente as tarefas a apresentar na sala de aula tendo em conta os processos de raciocínio que podem estar envolvidos. Além disso, para desenvolver um questionamento eficaz é necessário que tenha presente não só a importância de generalizar e justificar, mas também o que tipo de justificação se deve esperar que os alunos apresentem em cada tarefa de acordo com o respetivo nível de ensino. Concretizar estas sugestões em propostas de tarefas e investigar modos de exploração na sala de aula constitui um importante desafio para a educação matemática.

Nota

1 Considerando que os alunos não trabalharam com variáveis algébricas anteriormente à resolução da tarefa, a referência a linguagem simbólica no 7.º ano refere-se a linguagem simbólica sem variáveis.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A strutural approach. *Synthese*, *134*, 25–44.

Azevedo, A. B. G. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário* (Dissertação de mestrado, Lisboa, Universidade de Lisboa).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Merlín I.D.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 103–131.

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(4), 308–345.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, *88*(5), 412–417.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematicallearning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 176–201). Routledge: Taylor and Francis.

Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: A survey. In M. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Eds.), *Actas do IX EIEM — Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 75–104). Fundão: SPCE-SEM.

Henriques, A. C. (2011). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). (disponível em `http://repositorio.ul.pt/`)

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, NJ: Sage.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning on task solving. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 165–190.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 29–55.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 255–276.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: Uma análise com alunos do 9.º ano. *Atas do EIEM — Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 347–364), Póvoa do Varzim.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 3–9.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*(5–6), 419–430.

Riviera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, *15*(4), 213–221.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1–12). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Resumo. Neste artigo analisamos os processos de raciocínio de alunos do 3.º ciclo na resolução de tarefas de cunho algébrico envolvendo propriedades dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$. O quadro conceptual destaca como processos-chave do raciocínio matemático a generalização e a justificação, dando também atenção às representações e à significação. A metodologia é qualitativa, sendo estudados quatro alunos do 7.º e três do 9.º ano com dados recolhidos por entrevistas e observação na sala de aula (ambas com videogravação) e análise documental. Na formulação de generalizações, grande parte dos alunos segue uma abordagem indutiva, generalizando para uma classe de objetos mais ampla as relações observadas em casos particulares. Verificam-se também situações de raciocínios abdutivos. A generalização é mais imediata nos alunos do 9.º ano, que evidenciam por vezes generalizações de cunho dedutivo. A atividade de justificar não é espontânea nos alunos, mas decorrente do questionamento, os alunos mostram ser capazes de fazer justificações baseada em conhecimentos anteriores, em propriedades ou conceitos matemáticos e contraexemplos que refutem uma afirmação.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, Álgebra, Números inteiros, Números reais

Abstract. This article aims to analyse grade 7 and grade 9 students' mathematical reasoning while working on tasks involving properties of number sets $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{R}$. The conceptual framework emphasises generalization and justification as key aspects of mathematical reasoning, and also considers representations and sense making. The methodology is qualitative and data collection includes interviews and observation of classes (both video-recorded) and analysis of written tasks of four grade 7 students and three grade 9 students. Making generalization, most students follow an inductive approach, generalizing the relations observed in particular cases to a larger class of objects. There are also instances of abductive reasoning. Grade 9 students generalize in a more effective way and sometimes these generalizations have a deductive nature. Justifying is not done spontaneously, but, in response to teacher's questioning, students show to be able to make justifications based on previous knowledge of properties or mathematical concepts and based on counterexamples that refute a statement.

Keywords: Mathematical reasoning, Algebra, Integers, Real numbers.

■ ■ ■

JOANA MATA-PEREIRA

Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

JOÃO PEDRO DA PONTE

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

(Recebido em abril de 2012, aceite para publicação em outubro de 2012)