Tarefas de exploração e investigação na aula de matemática[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Marisa Quaresma
Escola Básica 2,3 José Saramago, Poceirão, Palmela e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Resumo

Neste artigo procuramos mostrar que, em termos curriculares, as explorações e investigações matemáticas podem ser integradas no dia a dia da sala de aula de Matemática em vez de constituírem um trabalho periférico. Tendo por base dois episódios, um relativo à aprendizagem inicial dos números racionais no 5.º ano e outro relativo à aprendizagem da linguagem algébrica no 7.º ano, mostramos como tarefas deste tipo podem ser apresentadas aos alunos tendo em atenção a necessária interpretação, proporcionar momentos significativos de trabalho autónomo, e conduzir a discussões coletivas muito participadas. Deste modo, são tarefas que proporcionam um funcionamento da sala de aula com características inovadoras em relação ao ensino convencional baseado na exposição de conceitos e procedimentos, apresentação de exemplos e prática de exercícios, e com resultados muito mais positivos em termos de aprendizagem.

Palavras-Chave: Explorações, Investigações, Prática Letiva, Números racionais, Pensamento algébrico.

Abstract

Abstract. In this paper we show that, as a curriculum feature, mathematical explorations and investiga-tions, instead of being just a peripheral activity, may be an integral part of the daily work of the mathe-matics classroom. Based on two episodes, one when students begin learning rational numbers in grade 5 and the other when they learn algebraic language in grade 7, we show how such tasks can be presented to students taking into account the necessary interpretation, provide significant moments of autonomous work, and lead to widely participated group discussions. Thus, we argue that such tasks support an innovative mathematics classroom in relation to formal teaching based on the exposition of concepts and procedures, presentation of examples and practice of exercises, and with much more positive results in terms of students learning.

Keywords. Explorations, Investigations, Teaching practice, Rational numbers, Algebraic thinking.

1 Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Introdução

O trabalho com tarefas de investigação e exploração na sala de aula constitui uma orientação curricular atual muito importante que tem as suas raízes na perspetiva da resolução de problemas (PÓLYA, 1975). Tal como um problema, uma tarefa de investigação e exploração não é de resolução imediata, requerendo do aluno um esforço de compreensão aprofundado, a formulação de uma estratégia de resolução, a concretização desta estratégia e uma reflexão sobre os resultados obtidos. No entanto, distinguindo-se dos problemas de Matemática que indicam com grande concisão o que é dado e o que é pedido, estas tarefas contêm um elemento de indefinição ou de abertura, requerendo uma atenção especial à sua formulação, por parte de quem os resolve (PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003).

Note-se, porém, que nos problemas clássicos há lugar a momentos de exploração e investigação. É possível colocar hipóteses, particularizando as condições dadas ou formulando conjeturas acerca da possível solução, e analisar quais as consequências. Além disso, muitos problemas permitem que se inventarie todos os casos possíveis, para serem estudados um a um e verificar quais os que satisfazem certa condição. Noutros problemas é possível gerar dados a partir do enunciado e explorar regularidades nesses mesmos dados. No entanto, as tarefas de exploração e investigação têm a característica distintiva de requererem sempre um trabalho atento de interpretação da situação, a precisar ou reformular as questões a investigar e a construir representações apropriadas. Mais do que um contexto para aplicar conceitos já aprendidos, estas tarefas servem principalmente para promover o desenvolvimento de novos conceitos e para aprender novas representações e procedimentos matemáticos.

A resolução de problemas constitui uma importante orientação curricular, que se afirmou sobretudo desde a publicação da *Agenda para a ação* do NCTM (1980, p.1). Neste documento proclamava-se que "a resolução de problemas deve ser o foco da Matemática escolar". Mais tarde, os programas portugueses (ME, 1991, p. 194) diziam que "o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas é um eixo organizador do ensino da Matemática". Como consequência, a "resolução de problemas" ganhou uma conotação positiva entre os professores e os autores de manuais, como correspondendo a uma atividade necessária e importante no ensino da Matemática. No entanto, o seu lugar nas práticas profissionais dos professores revelou-se problemático. Uma das estratégias seguidas por muitos professores foi o estabelecimento de práticas como o "problema da semana" ou o "problema do mês". As aulas continuavam a decorrer como até aí, com a diferença que, de tempos a tempos, num momento especial, se realizava um problema que, com frequência, pouco tinha a ver com o que estava a ser trabalhado nas aulas. Por outro lado, em especial nos primeiros anos, continuaram a usar-se os problemas verbais (*word problems*) de sempre, por vezes com alguma má consciência por se sentir que se tratava de simples exercícios em que era preciso "fazer uma conta", disfarçados de problemas. Começou a sentir-se que a valorização curricular da resolução de problemas não estava a corresponder ao previsto e, perante as dificuldades de concretização produtiva na sala de aula, chegou-se a um impasse (PONTE & CANAVARRO, 2003). Era necessário perceber melhor que tipos de problemas valorizar e como os trabalhar com os alunos.

O uso crescente de instrumentos tecnológicos na sala de aula, em especial o computador, é, provavelmente o principal factor responsável pela divulgação e crescente aceitação das tarefas de exploração e investigação. Na verdade, as tecnologias permitem simular com facilidade situações complexas que, de outro modo, teríamos dificuldade de estudar. Permitem verificar o que acontece num grande número de casos, favorecendo a formulação e teste de conjeturas. Não é por acaso que um interessante artigo que discute de forma aprofundada as possibilidades da tecnologia para o trabalho de cunho investigativo por parte dos alunos tenha sido escrito precisamente por Seymour Papert (1971/1991), o criador da linguagem Logo.

No entanto, mesmo sem tecnologia é possível explorar muitas situações em termos matemáticos. Neste sentido, as explorações e investigações têm muito de modelação – criar uma representação que sirva de base a um modelo matemático da situação dada. Mas também têm uma vertente importante de trabalho matemático como trabalhar com definições, classificar objetos, relacionar propriedades. Os dois termos, exploração e investigação, têm vindo a ser cada vez mais usados, sem que exista uma linha de demarcação nítida entre eles – falamos de investigações quando se trata de tarefas num contexto matemático mais sofisticado com um considerável grau de desafio matemático e de explorações quando se trata de situações que permitem um fácil envolvimento da generalidade dos alunos.

Neste artigo apresentamos duas situações, relatadas em pesquisas recentes, tendo por base trabalho exploratório e investigativo realizado pelos alunos na sala de aula, procurando mostrar como este trabalho se insere de modo natural no processo de aprendizagem de importantes conceitos e representações matemáticas por parte dos alunos. O nosso objetivo é evidenciar que, em vez de constituir um trabalho à parte, as explorações e investigações constituem tarefas que proporcionam um modo de funcionamento da sala de aula com características inovadoras em relação ao ensino convencional em que o professor expõe novos conceitos e procedimentos, apresenta um ou dois exemplos e passa exercícios para os alunos praticarem e memorizarem. Procuramos, sobretudo, evidenciar as aprendizagens que os alunos realizam neste novo contexto de trabalho.

Explorando representações e relações nos números racionais

O estudo. A primeira situação que apresentamos decorre de uma investigação que visa perceber de que modo o trabalho numa unidade de ensino baseada na abordagem de cunho exploratório com as diferentes representações de número racional, nos seus diferentes significados, pode contribuir para a compreensão da noção de número racional e dos conceitos de ordenação, comparação e equivalência de número racional, em alunos do 5.º ano de escolaridade (QUARESMA, 2010). O quadro teórico sustenta-se na abordagem investigativa e exploratória (PONTE, 2005; PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2003) e nos estudos sobre números racionais, em especial no que respeita ao papel das diferentes representações (BEHR & POST, 1992). Trata-se de uma experiência de ensino, conduzida pela segunda autora deste artigo no contexto da sua prática profissional usando uma metodologia de observação participante. A recolha de dados inclui dois testes, registos vídeo, registos em diário de bordo, análise das produções dos alunos e entrevistas a vários alunos (antes e depois da experiência).

A tarefa. A tarefa que aqui apresentamos, "Dobras e mais dobras" consta dos materiais de apoio ao novo Programa de Matemática para o 2.º ciclo (MENEZES, RODRIGUES, TAVARES & GOMES, 2008) e foi proposta na primeira aula dedicada ao estudo dos números racionais. Note-se que estes alunos já tinham estudado numerais decimais no 1.º ciclo, bem como operadores fracionários, mas sem usar a representação em fração.

Dobras e mais dobras

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:
    - a primeira em duas;
    - a segunda em quatro;
    - a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Regista as tuas conclusões.

Com a realização desta tarefa pretende-se introduzir a linguagem associada aos números racionais em diferentes representações e significados. Assim, foram definidos os seguintes objetivos: (i) representar sob a forma de fração, numeral decimal e percentagem um número racional não negativo; (ii) compreender e usar um número racional na relação parte-todo, medida e razão; (iii) comparar números representados de diferentes formas; e (iv) identificar e dar exemplos de frações equivalentes.

Esta tarefa envolve os significados parte-todo, medida e razão, com grandezas contínuas (segmentos retangulares), sendo apresentada no contexto de tiras de papel. A informação é dada na representação ativa (tiras de papel, ou seja, objetos) e as respostas podem ser dadas nas representações verbal, pictórica, decimal, fracionária ou em percentagem. Na questão 1 é dado o "todo", a tira de papel, e é pedido aos alunos que representem três partes diferentes dessa tira. A questão 2 pede aos alunos que comparem entre si as três partes obtidas na questão anterior, usando a informação existente na representação ativa. Não é pedida uma representação específica, podendo os alunos utilizar a representação que entenderem; contudo, é expectável que usem as representações obtidas na questão anterior para fazerem as comparações pedidas. Na questão 3 é pedido aos alunos que determinem a razão entre o comprimento da tira e o comprimento de cada uma das partes obtidas por dobragem.

Para os alunos em causa, esta tarefa possibilita uma atividade exploratória a vários níveis. A questão 1 começa por ter um carácter de exercício, ao pedir aos alunos para fazerem diversas dobragens, mas de seguida assume um carácter mais aberto ao pedir-lhes para representarem "de diferentes formas", algo que a maioria tem dificuldade em interpretar como sendo uma indicação para usar uma representação decimal, pictórica, verbal ou outra de número racional. A questão 2 pede para comparar diversas tiras e para "tirar conclusões", o que constitui uma indicação muito aberta, susceptível de diversas interpretações. Finalmente, a questão 3 envolve um termo cujo significado não é óbvio ("razão"), bem como um novo apelo a tirar mais conclusões.

O trabalho em sala de aula é realizado em grupo, sendo formados seis grupos de trabalho com quatro ou cinco alunos cada. A professora distribui enunciados das questões individualmente. Primeiro, entrega as questões 1 e 2, dá cerca de 30 minutos para a sua resolução e promove a respetiva discussão em cerca de 25 minutos. Seguidamente, distribui o enunciado da questão 3, dá cerca de 20 minutos para a sua resolução e, durante cerca de 15 minutos, faz-se a discussão coletiva dessa mesma questão. Finalmente, num momento posterior, é feita uma nova discussão bem como a síntese do trabalho realizado. Temos assim diversos ciclos com três momentos diferenciados – apresentação e negociação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva.

Apresentação da tarefa. Logo no início, os alunos mostram alguma dificuldade em interpretar o enunciado. Deste modo, a realização de cada uma das questões é antecedida por um momento de discussão em que se negoceia na turma o significado dos diversos termos que embaraçam os alunos. Assim, na questão 1, a professora opta por realizar a representação da dobragem da primeira tira em duas em grande grupo. Desenha a tira no quadro, representando também pictoricamente a parte da tira a considerar e, de seguida, pede aos alunos que digam que parte da tira está pintada. Usando a representação verbal, muitos alunos dizem que está pintada "metade da tira". Depois, a professora continua a insistir noutra forma de representar aquela parte e, a partir da representação verbal "metade", alguns alunos sugerem a representação decimal 0,5. A professora pede ainda outras formas de representação e dois alunos indicam a fração "um de dois". Finalmente, como os alunos não indicam mais nenhuma representação, a professora pergunta: "e se eu quisesse representar em percentagem? Também podia?" De imediato, a maior parte diz que é 50%. Esta discussão coletiva inicial representa a negociação de uma parte da primeira questão, que permite a continuação do trabalho.

Trabalho dos alunos. Depois da discussão inicial, que permite ultrapassar as dúvidas existentes, os alunos mostram-se bastante mais motivados e começam rapidamente a trabalhar nos pontos seguintes da questão 1. Durante a sua realização, a professora procura ter a noção do que vai sendo feito nos diversos grupos, mantendo-se atenta às descobertas realizadas e a novas dúvidas que possam surgir. Tendo por referência a situação anterior, os alunos não mostram qualquer dificuldade em chegar a diversas representações de $^1/_4$ da tira e concluem que $^1/_4 = 0{,}25$. No entanto, mostram bastante dificuldade em chegar à representação decimal de $^1/_8$, pois não conseguem encontrar metade de 0,25, mostrando alguma insegurança no uso do sistema de numeração decimal. Após a resolução da questão 1, a professora pede aos alunos que colem as tiras de papel na ficha de trabalho, para conseguirem comunicar à turma as suas descobertas. Assim, as representações ativas (tiras de papel) passam a representações pictóricas, e vão estar na base da resolução das questões 2 e 3.

A resolução da questão 2 também é precedida por uma negociação do trabalho a desenvolver, pois os alunos mostram dificuldade em compreender o que é "comparar as três partes obtidas". A professora começa por mostrar as duas primeiras tiras ($^1/_2$ e $^1/_4$) e pede aos alunos que as comparem. A visualização leva os alunos a concluir que $^1/_4$ é metade de $^1/_2$ e este é o mote para se dar início ao trabalho nos grupos.

Mais adiante, na questão 3, a professora também sente necessidade de ajudar os alunos a compreender o enunciado. Como as tiras de papel têm medidas diferentes, opta por lhes pedir que considerem que todas as que medem 20 cm e, a partir daí, os alunos chegam com facilidade a uma noção informal de razão.

Discussão. No início da discussão coletiva da questão 1, para apoiar a participação dos alunos, a professora pede a cada grupo que afixe no quadro o trabalho que realizou. De seguida, pede ao primeiro grupo que apresente o seu trabalho à turma. Diana, a porta-voz, diz "Na figura B escrevemos: quarta parte; 1 por 4 ($^1/_4$); 1 a dividir por 4; 25% e 0,4".Os alunos se apercebem do erro da colega ao referir que o número decimal que representa esta situação é 0,4. Como nenhum repara no erro, a professora prossegue para a apresentação dos outros grupos e pede a Tiago para apresentar o trabalho desenvolvido pelo seu grupo (Figura 1):

> **Tiago**: Então nós temos: quarta parte; um sobre quatro ($^1/_4$); um a dividir por quatro; 25% e 0,25.
>
> **Professora**: (…) Concordas Diana?
>
> **Diana**: Sim…?
>
> **Turma**: Não! Está mal…
>
> **Professora**: O que é que está mal?
>
> **Rui**: É o 0,25…
>
> **Professora**: Porquê?
>
> **Rui**: Porque é a quarta parte.
>
> **Daniel**: É 0,25 porque é a metade do primeiro. O primeiro era 50, se fizermos a metade é 25.
>
> **André**: Oh professora! Eu acho que é o 0,25 porque é a quarta parte do 100. Porque 25 vezes 4 dá 100.

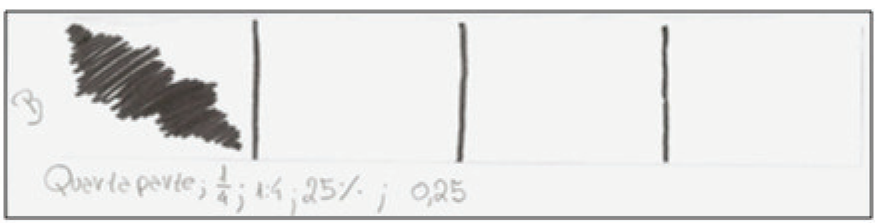


Figura 1 – Resolução da questão 1a) por Leonor, Rui, Henrique e Tiago.

Note-se como, a seguir à pergunta "porquê?" da professora, diversos alunos (Rui, Daniel, André) apresentam explicações sucessivamente mais refinadas. Nos seis grupos apenas o de Diana comete o erro de "transformar" o denominador da fração em número decimal. Aparentemente, os restantes grupos chegam ao numeral decimal por comparação com o valor anterior e com 100%.

Na terceira tira, todos os grupos usam corretamente a representação verbal, a fração, o quociente e a percentagem. Contudo, em geral, toda a turma mostra dificuldades na representação em numeral decimal. Verificam-se essencialmente dois tipos de erros. Um, como vimos, surge no grupo de Diana que constrói o numeral decimal por transformação do denominador da fração. Outro erro, cometido por alguns grupos, tem origem na dificuldade em determinar a metade de 0,25. Os alunos começam por procurar determinar metade de 25% e obtêm 12,5, só que, depois, mostram dificuldade em obter a metade de 0,25. Os alunos sabem que $^1/_4$ é 0,25, mas, ao fazerem a metade de 0,25, enganam-se e obtêm 12,5 (Figura

2). Este resultado leva-os a entrar em contradição porque acham que este resultado não faz sentido já que a metade de 0,25 deve ser um número menor e, neste caso, 12,5 é maior. Os alunos mostram assim dificuldade na compreensão do sistema de numeração decimal e não se lembram de acrescentar um zero para ficarem com 0,250 e a partir daí chegarem a 0,125.

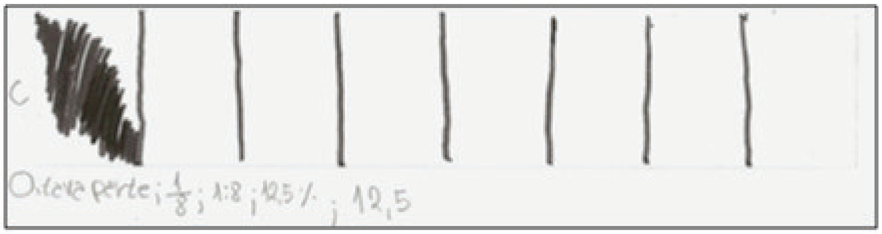


Figura 2 – Resolução da questão 1c) por Leonor, Rui, Henrique e Tiago.

Contudo, durante a discussão da tarefa, os alunos conseguem chegar à resposta correta:

> **Daniel**: É 12,5 % porque a *c* é metade da *b*.
> **Professora**: Se o *b* era 25%, o *c* é…
> **Daniel**: É a metade que é 12.
> **Professora**: É 12%?
> **Luís**: Não professora é 12,5%. Porque 12,5+12,5 é 25.
> **Professora**: Então e o decimal, como é que fica?
> **Tiago**: É 0,125.
> (…)
> **André**: Pois é 0,125.
> **Professora**: Porquê?
> **André**: É 0,125 porque é que dá uma unidade inteira.

É Tiago quem indica resposta correta, mas é André que a justifica estabelecendo a relação com a unidade.

Na questão 2, todos os grupos conseguem estabelecer algumas relações entre as partes e só alguns conseguem comparar todas as tiras. Todos os grupos usam apenas a linguagem verbal para exprimir essas relações. Eis um exemplo (Figura 3):

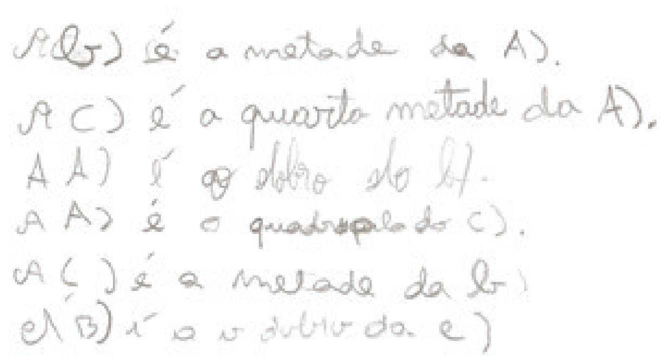


Figura 3 – Resolução da questão 4 por André, Francisco, Rodrigo e Miguel.

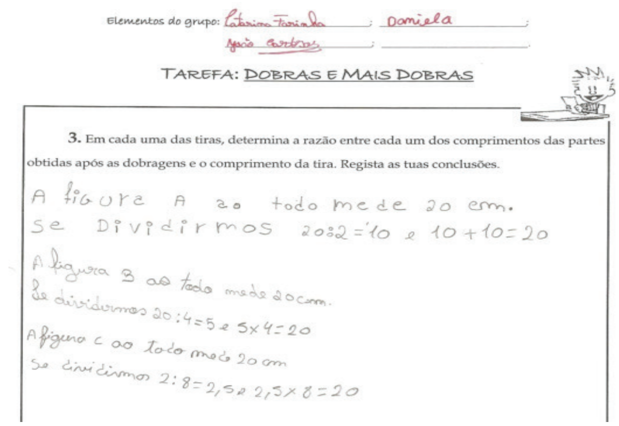
O grupo de André, para além das relações simples, “metade” e “dobro”, estabeleceu relações mais complexas de “quádruplo” (tendo por base “dobro” do “dobro”) e “quarta parte” (“quarta metade” no seu dizer, para significar “metade de metade”). Formulações idênticas foram apresentadas pelo grupo de Mariana. Na discussão desta questão a professora pede a cada grupo que indique uma das relações que encontrou. Como os alunos só usam a representação verbal, pede-lhes, que usem também a linguagem matemática:

> **Daniel**: A relação entre o primeiro e o segundo, é que o segundo é metade do primeiro.
> **Professora**: Como é que eu posso escrever isso utilizando números? Como é que eu faço a metade?
> **André**: Dividir por 2.
> **Rui**: Um de quatro é igual a metade a dividir por 2.
> **André**: A *b* é o dobro da *c*.
> **Professora**: Como é que eu escrevo isso?
> **André:** Um de quatro é o dobro.
> **Professora**: Como é que é o dobro?
> **André**: Duas vezes…
> **Professora**: Duas vezes o quê?
> **André**: Um traço oito.
> **Professora**: Um oitavo. Um quarto é o dobro de um oitavo.
> **Alexandre**: O primeiro é o dobro do segundo.
> **Professora**: Como é que eu escrevo isso?
> **Alexandre**: Um meio é o dobro de… Um sobre quatro.

É de notar que os alunos usam ainda uma linguagem espontânea para falar das frações (“um de quatro”, “um traço oito”), linguagem esta que a professora vai corrigindo a pouco e pouco.

Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos conseguem encontrar as principais relações existentes entre $^1/_2$, $^1/_4$ e $^1/_8$ utilizando, essencialmente, as representações ativas (ou seja, as tiras). Os alunos conseguem, autonomamente, comparar as três frações apresentadas, o que os ajuda bastante na compreensão dos números racionais, especialmente no que respeita ao significado parte-todo e à compreensão da magnitude de um número racional. Exprimem essas relações em linguagem verbal e mostram dificuldades em representá-las utilizando a linguagem matemática. Esta foi a primeira aula de ensino formal deste tópico, pelo que, é natural que os alunos ainda tenham bastantes dificuldades com a linguagem própria das frações.

A questão 3 tem como objetivo desenvolver nos alunos a compreensão de número racional como razão. Para facilitar a resolução e tendo em conta que esta é a primeira aula sobre o tema, a professora estabelece um número “simpático” para a medida da tira, 20 cm. Os alunos apoiam-se nas relações entre as partes da tira, discutidas na questão anterior, para descobrirem o comprimento de cada parte, que representam do seguinte modo (Figura 4):


Elementos do grupo: ; Daniela ;

TAREFA: DOBRAS E MAIS DOBRAS

3. Em cada uma das tiras, determina a razão entre cada um dos comprimentos das partes obtidas após as dobragens e o comprimento da tira. Regista as tuas conclusões.

A figura A ao todo mede 20 cm.
Se Dividirmos 20:2 = 10 e 10 + 10 = 20
A figura B ao todo mede 20 cm.
Se dividirmos 20 : 4 = 5 e 5 × 4 = 20
A figura C ao todo mede 20 cm
Se dividirmos 2 : 8 = 2,5 e 2,5 × 8 = 20

Figura 4 – Resolução da questão 3 por Carolina, Diana e Filipe.

Apesar de conseguirem estabelecer uma relação entre o comprimento total das tiras e o comprimento das partes, os alunos não usam a representação simbólica de razão em fração, mas já a exprimem em linguagem verbal:

> **Professora**: Então vamos ver que a que conclusões chegaram. Que relação encontraram entre o comprimento da tira e o comprimento da primeira parte?
>
> **Luís**: A metade mede 10 cm. Ou seja, se a tira mede 20, a metade é 10. Que é 20 a dividir por 2.
>
> **Professora**: Então qual é a relação entre o comprimento da parte e do todo?
>
> **Vários alunos**: É a metade.

Note-se o estilo de questionamento da professora na discussão coletiva, pontuado por questões abertas ("vens explicar...", "concordam...", "o que é que está mal?", "porquê?", "então e o decimal, como é que fica?"). Note-se, também, que a cultura da sala de aula já integrou a noção que os alunos podem contribuir com diferentes respostas e discordar e argumentar uns com os outros.

Síntese. Na síntese final a professora coloca diversas questões para retomar os aspectos onde os alunos mostram mais dificuldade. Assim, a propósito da questão 1, é recordado o sistema de numeração decimal, para que os alunos compreendam porque é que 0,25:2 = 0,125. Conclui-se que o traço de fração corresponde à operação divisão e, portanto, neste caso, $^1/_8 = 1 : 8 = 0{,}125$. A partir do trabalho dos alunos, a professora pede-lhes que enunciem uma "regra" para converter um número decimal numa percentagem. Os alunos, analisando os exemplos discutidos, concluem que "andam" sempre duas "casas" para a direita e, apesar de não conseguirem verbalizar a multiplicação por 100, acabam por descobrir, por si mesmos, a "regra" pedida.

Retomando a questão 2, são analisadas algumas frações equivalentes, concluindo-se que uma dada parte pode ser representada por uma infinidade de frações. Discute-se também a representação da unidade concluindo-se que, quando o numerador é igual ao denominador, estamos a considerar a unidade e, podemos representar, por exemplo, $^4/_4 = 1$. Uma aluna verifica ainda que, $^4/_8 = {^1/_2}$ porque 4 é metade de 8, concluindo-se que existem várias frações que representam o mesmo que $^1/_2$, sendo em todas elas o numerador metade do denominador. Embora não se tenha falado expressamente em equivalência de frações, abriu-se assim caminho a esta noção. São também explicados os termos das frações (numerador, denominador) e a sua relação, especialmente, no significado parte-todo. Para confirmar a compreensão dos alunos, a professora pede-lhes ainda que ordenem as três frações obtidas, e estes indicam com facilidade ordenação correta ($^1/_2 > {}^1/_4 > {}^1/_8$) e concluem que "à medida que vamos dobrando a tira, as partes vão ficando cada vez mais pequenas". A questão 3, que tinha servido essencialmente para a preparação da abordagem do conceito de razão, seria retomada noutra altura.

Desenvolvendo o pensamento algébrico

O estudo. A segunda situação decorre de um estudo que visa compreender como uma unidade de ensino para o 7.º ano, baseada no estudo de padrões e regularidades, nomeadamente em sequências, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico e, em particular, para a compreensão das variáveis e equações (BRANCO, 2008). A abordagem visa o desenvolvimento do pensamento algébrico promovendo a generalização e a sua representação (BLANTON & KAPUT, 2005) no trabalho com sequências pictóricas e numéricas e uma interpretação estrutural das equações (KIERAN, 1992). Tal como no caso anterior, esta experiência de ensino foi conduzida pela terceira autora deste artigo no contexto da sua prática, usando observação participante. A recolha de dados tem por base a gravação áudio, um diário de bordo, os documentos produzidos pelos alunos da turma nas tarefas propostas e as entrevistas realizadas a dois alunos antes e depois da leccionação da unidade.

A tarefa. Elaborada a partir de Herbert e Brown (1999), a tarefa tem por base um problema clássico, já conhecido na Idade Média.

Atravessando o rio

1. Seis adultos e duas crianças pretendem atravessar um rio. O pequeno barco que está disponível apenas pode levar um adulto ou uma ou duas crianças (ou seja, existem três possibilidades: 1 adulto no barco; 2 crianças no barco; 1 criança no barco). Qualquer pessoa pode conduzir o barco. Quantas vezes o barco tem de atravessar o rio até todos estarem na outra margem?

2. O que acontece se quiserem atravessar o rio:
   - 8 adultos e 2 crianças;
   - 15 adultos e 2 crianças;
   - 3 adultos e 2 crianças.

3. Podem descrever, por palavras, como resolvem o problema se o grupo de pessoas for constituído por duas crianças e um número qualquer de adultos? Verifiquem se a vossa regra funciona para 100 adultos?

4. Escrevam uma fórmula para um número de adultos A e duas crianças.

5. Um grupo de adultos e duas crianças fizeram 27 viagens para atravessar o rio. Quantos adultos faziam parte deste grupo?

6. O que acontece se mudar o número de crianças? Verifiquem o que muda na fórmula que escreveram anteriormente, nos seguintes exemplos:
   - 6 adultos e 3 crianças;
   - 6 adultos e 4 crianças;
   - 8 adultos e 4 crianças;
   - A adultos e 7 crianças.

Trata-se de uma situação, cuja exploração permite identificar regularidades que podem ser expressas em diferentes representações (o que é necessário para que um adulto passe para a outra margem? E uma criança?). Por sua vez, a identificação destas regularidades permite a generalização da situação e a sua representação algébrica. Assim, a situação ajuda a promover a compreensão da linguagem algébrica utilizada e a interpretação da representação da generalização contribui para uma correta interpretação dos resultados obtidos. Os seus objetivos são promover nos alunos a capacidade de (i) encontrar regularidades e generalizá-las, (ii) utilizar e interpretar a linguagem algébrica, e (iii) analisar a influência da variação das condições nas soluções encontradas. Note-se que a tarefa está formulada em linguagem natural, mas a sua resolução depende de se encontrar uma representação adequada e da interpretação dos resultados matemáticos obtidos.

A consideração de um número fixo de crianças e um número variável de adultos dá origem à exploração de uma sequência (1 adulto, 2 adultos, etc.). Essa exploração torna-se mais complexa com a consideração de um número variável de crianças e um número variável de adultos dá origem a uma família de sequências, aprofundando a investigação feita pelos alunos. A tarefa foi proposta numa turma de 7.º ano de escolaridade, depois de realizadas duas tarefas com sequências pictóricas que proporcionaram o início da utilização da linguagem algébrica. Também neste caso, a realização da tarefa envolve momentos da aula com dinâmicas distintas. Proporciona momentos de apresentação/negociação, de trabalho autónomo dos alunos (aqui aos pares, com discussão entre os alunos e acompanhado pela professora) e de discussão colectiva. A cada momento de trabalho autónomo segue-se uma discussão colectiva, ciclo que se repete várias vezes. A realização da tarefa encerra com uma síntese final.

Apresentação da tarefa. A professora organiza os alunos em pares para discutirem entre si a situação e formularem estratégias de resolução. Na apresentação da tarefa, salienta as condições dadas para as viagens. Os alunos começam a trabalhar, simulando as primeiras viagens e discutindo várias possibilidades. Contudo, a situação revela-se confusa e os alunos colocam questões à professora para esclarecer as condições dadas e para discutirem as suas primeiras hipóteses. Gera-se um ambiente de alguma agitação.

Neste ponto a professora considera que se impõe um momento de diálogo coletivo que ajude os alunos a compreender e interiorizar as condições da situação proposta. Solicita então a atenção de toda a turma e, seguindo a sugestão de um par de alunos, pergunta o que acontece se na primeira viagem o barco for conduzido por um adulto. Os alunos verificam a necessidade de a primeira viagem ser realizada por duas crianças de modo a permitir que o barco regresse à margem de partida, sendo novamente conduzido por uma criança. A professora questiona quem pode seguir no barco nas viagens seguintes e remete os alunos de novo para o trabalho autónomo. Antes disso, alerta toda a turma que se pretende determinar o número mínimo de viagens, devendo evitar-se a realização de viagens por adultos que têm de regressar com o barco.

Trabalho dos alunos. Os alunos voltam a experimentar várias possibilidades e verificam que algumas delas criam situações em que o adulto tem de regressar com o barco sem que passe efetivamente mais um adulto para a outra margem. Alguns pares tentam, ainda, colocar um adulto e as duas crianças numa viagem ou um adulto e uma criança. O diálogo seguinte, entre Diana e a professora, mostra como nesta fase os alunos ainda estão a tentar compreender as condições dadas:

> **Diana**: Se forem as duas crianças para lá. Depois outra vem.
> **Professora**: Sim. Vão duas para lá e depois fica lá uma e a outra vem.
> **Diana**: Mas um adulto não pode ir com uma criança?
> **Professora**: Não. Um adulto tem de ir sozinho, não é?
> **Diana**: Já percebi. Vão duas crianças para lá, depois uma vem. Depois ela fica lá e vem um adulto.
> **Professora**: Certo.
> **Diana**: Depois a outra criança vem e vai outro adulto.
> **Professora**: Sim. E vão ficar aqui dois adultos. Quem é que vai levar o barco para lá?
> **Diana**: Pois!?

Diana e Mariana simulam as viagens e, tal como outros pares, acabam por indicar corretamente as quatro primeiras viagens. Contudo, sugerem que a quinta viagem seja feita por um adulto, ficando novamente com a situação em que o adulto terá de regressar com o barco. Durante algum tempo, os alunos continuam a sua exploração de modo autónomo, sendo este trabalho acompanhado pela professora que se desloca junto deles. Todos os pares verificam que a quinta viagem deve ser realizada, novamente, pelas duas crianças. Na sequência, vão pensando nas viagens necessárias até todos os membros do grupo estarem na outra margem. Os vários pares de alunos usam diferentes representações. Alguns descrevem em linguagem natural todas as viagens, outros produzem esquemas ou associam representações icónicas e simbólicas (Figuras 5 e 6):

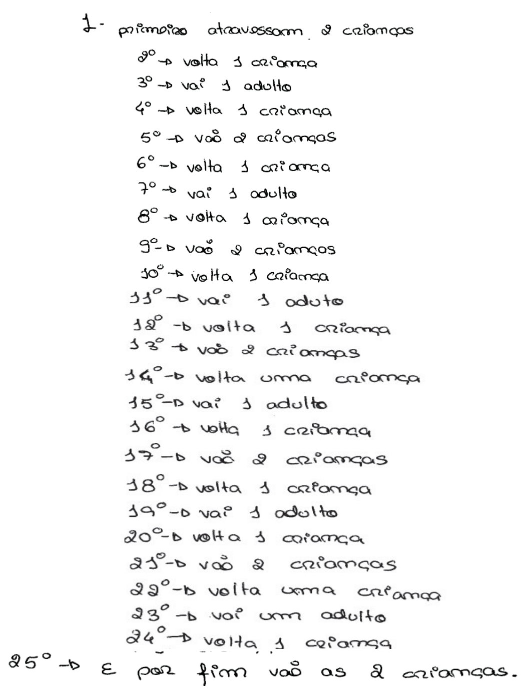


Figura 5 – Representação de Beatriz e Andreia na Questão 1

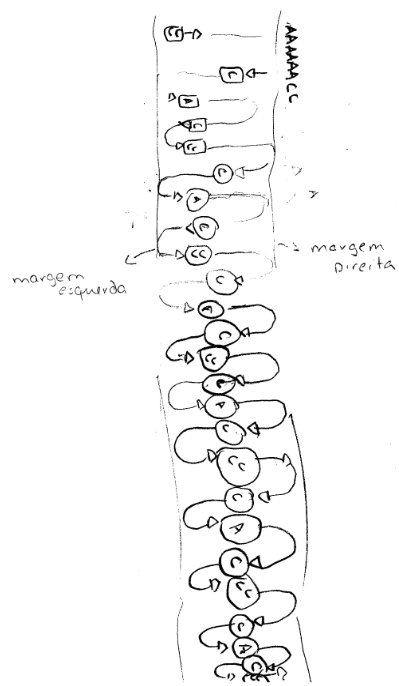


Figura 6 – Representação de Joana e Catarina na Questão 1

Diana e Mariana identificam a regularidade mas não indicam o número total de viagens e não referem o que acontece no final. Estas alunas não concretizam as vinte e cinco viagens e apenas apresentas as quatro viagens que se repetem para cada adulto passar de margem (Figura 7):

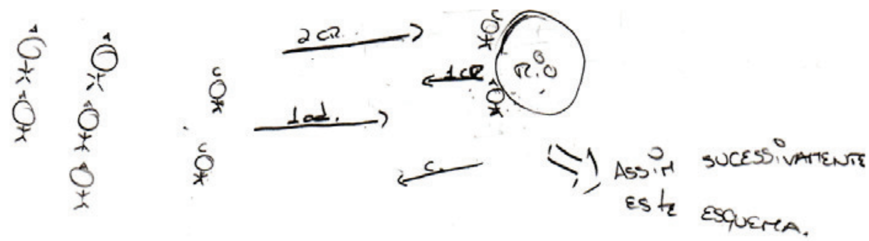


Figura 7 – Representação de Diana e Mariana na Questão 1

Discutindo com a professora, Diana e Mariana concluem que este conjunto de quatro viagens se repete seis vezes, ficando na primeira margem as duas crianças. Verificam, então, que para além das vinte e quatro viagens, tem de ser feita uma última viagem que transporta as duas crianças para junto dos adultos, realizando-se um total de vinte e cinco viagens. É o que escrevem em linguagem simbólica (Figura 8):

$$\boxed{4 \times 6 + 1 = 25}$$

Figura 8 – Representação do número de viagens por Diana e Mariana na Questão 1

À medida que os pares de alunos terminam a resolução desta primeira questão, a professora percorre os vários grupos e verifica que nem todos identificam a regularidade que existe nas viagens a fazer para que um adulto mude de margem. A professora solicita a alguns deles que apresentem as suas conclusões e, quando necessário, sugere que procurem uma regularidade na sequência de viagens, o que gera bastante discussão.

Os alunos passam à questão 2, em que se mantém o número de crianças e varia o número de adultos. Tendo encontrado a regularidade na questão anterior, os alunos respondem facilmente às três alíneas. Na situação de oito adultos e duas crianças, por exemplo, alguns alunos representam o número total de viagens pela expressão $8 \times 4 + 1 = 33$ revelando ter compreendido a regularidade e conseguir generalizá-la, aplicando-a a novas situações. No entanto, outros alunos, como Joana e Catarina dão uma resposta num misto de linguagem simbólica e linguagem natural (Figura 9):

2- se hover 8 Adultos e 2 crianças, acrescentamos
2 consuntos de 4 viagens, logo a 25 acrescenta-mos
8 viagens, 25+8 = 33, logo são precisas 33 viagens.

Figura 9 – Resposta de Joana e Catarina na Questão 2

Estas alunas partem da situação anterior, em que havia seis adultos e duas crianças, e indicam que para se transportar mais dois adultos é preciso realizar mais quatro viagens por cada um.

Discussão. Quando a maioria dos alunos termina a questão 2, a professora promove um momento de discussão de modo a aferir a compreensão dos alunos da situação e confrontar as suas diferentes representações. Verifica-se que algumas representações possibilitam rapidamente a identificação da regularidade, como é o caso das indicadas nas Figuras 5, 6 e 7. Contudo, o mesmo não acontece com a representação em linguagem natural usada por Susana e Cila (Figura 10), que não completam a sua resposta:

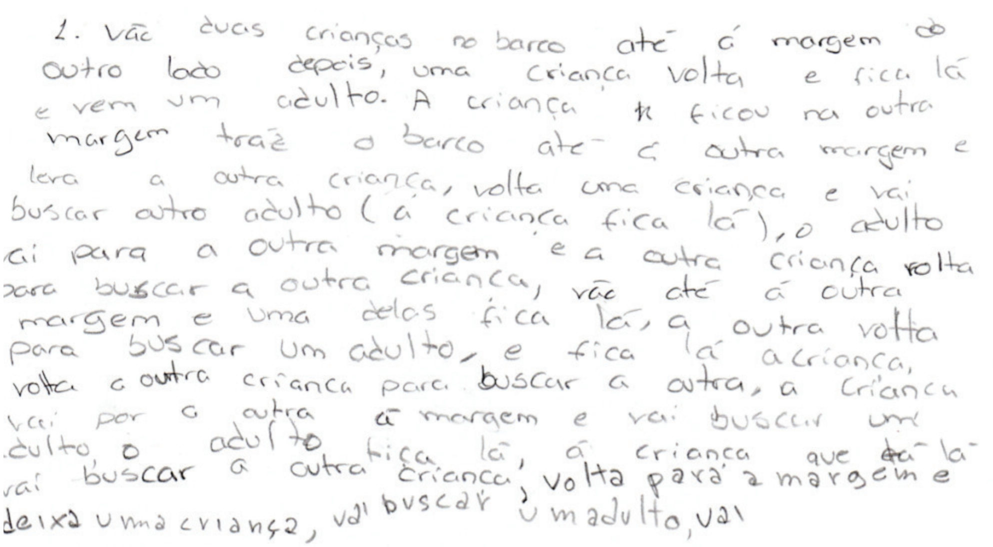

1. Vão duas crianças no barco até á margem do outro lado depois, uma criança volta e fica lá e vem um adulto. A criança ficou na outra margem traz o barco até á outra margem e leva a outra criança, volta uma criança e vai buscar outro adulto (a criança fica lá), o adulto vai para a outra margem e a outra criança volta para buscar a outra criança, vão até á outra margem e uma delas fica lá, a outra volta para buscar um adulto, e fica lá a criança, volta a outra criança para buscar a outra, a criança vai por a outra á margem e vai buscar um adulto, o adulto fica lá, a criança que lá vai buscar a outra criança, volta para a margem e deixa uma criança, vai buscar um adulto, vai

Figura 10 – Resposta de Susana e Cila na Questão 1

A apresentação de estratégias é importante para os alunos compreenderem as situações segundo diferentes perspetivas, esclarecerem significados e perceberem a importância do uso de representações eficientes. Esta apresentação cria também as condições para que os alunos possam fazer uma posterior generalização.

No caso dos oito adultos e duas crianças, Susana revela um raciocínio já bastante abstrato, que partilha com os colegas no quadro, escrevendo 8 x 4 + 1 = 33 e esclarecendo o seu significado:

> Fazemos oito adultos vezes o número de viagens que eles têm de fazer para levarem um adulto para a margem e fazemos mais um que é o número que as crianças fazem de volta.

Trabalho dos alunos e nova discussão. Com base na discussão anterior e nas conclusões a que chegam, os alunos dão continuidade ao trabalho autónomo nas questões 3, 4 e 5, que resolvem rapidamente. Assim, a questão 3 solicita que descrevam o modo como procedem qualquer que seja o número de adultos. A maioria dos alunos dá a sua resposta em linguagem natural mas alguns associam a linguagem natural à linguagem simbólica, como Joana e Catarina (Figura 11):

Figura 11 – Resposta de Joana e Catarina na Questão 3

No momento da discussão, Susana apresenta a sua regra para determinar o número total de viagens. Usando as suas próprias palavras indica uma vez mais o significado que atribui à expressão:

> **Professora**: Susana, diz lá.
>
> **Susana**: Então, é assim: Vai ser o número de adultos vezes as quatro viagens mais uma viagem das crianças.
>
> **Professora**: Está certo.
>
> **Susana**: Nos cem adultos fica cem vezes quatro mais um que é igual a quatrocentos e um.

Na questão 4, quando os alunos elaboram a expressão solicitada, atribuem um significado muito concreto aos seus termos. Na discussão os alunos apresentam várias expressões algébricas, como $A \times 4 + 1$, $4 \times A + 1$ e $4A + 1$, o que permite discutir a utilização da propriedade comutativa na multiplicação e a omissão do sinal “´”. Discute-se, ainda, o significado dos termos e coeficientes. O coeficiente 4 representa a sequência de quatro viagens que se repete, o termo 4*A* indica o número de viagens necessário para que *A* adultos mudem de margem e o termo 1 representa a última viagem, realizada pelas duas crianças. Na sequência desta discussão, a professora pergunta aos alunos como podem calcular o número de viagens para diferentes números de adultos, utilizando a expressão algébrica, retomando o significado dos termos e coeficientes:

> **Professora**: Se *A* for igual a vinte e seis o que é que significa?
>
> **Joana**: Que há vinte e seis adultos.
>
> **Professora**: Se *A* é igual a vinte e seis, digo que há vinte e seis adultos. Como é que devo fazer?
>
> **Susana**: É o vinte e seis vezes quatro mais um.

Na questão 5 é dado um número de viagens e os alunos devem determinar o número de adultos que integram o grupo, sem que haja repetição de viagens por parte dos adultos. Os alunos sugerem a realização das operações inversas, contudo nem todos têm claro qual a operação a realizar em primeiro lugar. Estes alunos usam uma abordagem aritmética, o que é natural dado que ainda não iniciaram o estudo de equações. Alguns começam por dividir vinte e sete por quatro mas verificam que assim não faz sentido retirar em seguida a última viagem. No momento da discussão com toda a turma, Joana indica rapidamente a sua resposta:

> **Joana**: Não dá certo.
> **Professora**: Não dá?
> **Joana**: Não dá certo. A 27 retira-se 1 e depois divide-se por 4.
> **Professora**: E o que é que acontece?
> **Joana**: Dá 6,5.
> **Professora**: O que é que significa?
> **Paulo**: Não é número certo [referindo-se a número natural].

Esta questão possibilita a discussão da adequação do resultado e da resposta a dar tendo em conta o contexto, promovendo a interpretação do resultado matemático obtido.

A questão 6 introduz uma nova variante, o número de crianças, sendo necessário estudar a influência desta condição na regra encontrada anteriormente. Os alunos são chamados a explorar a influência da variação do número de crianças na necessidade de viagens. Após a análise desta nova situação, verificam que isso não altera o conjunto de quatro viagens que é necessário fazer para que um adulto mude de margem. Com duas crianças, além do conjunto de quatro viagens por cada adulto, realizam uma viagem no final para transportar uma criança. No caso de terem três crianças identificam que apenas o número de viagens no final se altera, verificando que é necessário realizar mais duas viagens para que a terceira criança também mude de margem. Tendo mais duas, ou seja, quatro crianças no total, fazem duas viagens por cada criança, ou seja, duas vezes duas viagens. Respondem a cada uma das situações com base nos esquemas particulares, sem estabelecerem uma generalização. A professora promove uma discussão coletiva desta última questão pois alguns alunos manifestam dificuldade em compreender.

> **Professora**: Quando tenho duas crianças é isto aqui [$8 \times 4 + 1$]. Faltam-me quantas crianças?
> **Batista**: Duas.
> **Professora**: E quantas viagens tenho de fazer para as ir buscar?
> **Susana**: Mais quatro.
> **Professora**: Cada vez que vou buscar mais uma criança são duas viagens [conclusão das alíneas anteriores]. Se forem oito adultos e quatro crianças… Diz, Filipe.
> **Xico**: Oito vezes quatro mais um mais quatro.
> **Professora**: E agora, se tiver *A* adultos e 7 crianças? [Ninguém responde] Para duas crianças a expressão é esta [$4A + 1$]. Mas agora não tenho duas, tenho mais quantas?
> **Andreia**: Cinco.
> Professora – Vou ter mais cinco. Quantas viagens é que tenho de fazer por cada uma delas?
> **Diana**: Duas.
> **Andreia**: Cinco vezes dois.
> **Professora**: Então, fica quanto? Como é que simplifico a expressão?
> **Susana**: Quatro *A* mais…
> **Diana**: Dois vezes cinco dá dez.
> **Batista**: Onze.

Na discussão coletiva desta última questão os alunos analisam a influência da alteração do número de crianças na expressão inicialmente encontrada. Verificam que a sequência de quatro viagens necessária para colocar um adulto na outra margem se mantém e que, para além da viagem realizada no final pelas duas crianças, se fazem duas viagens por cada criança a mais. Deste modo, identificam uma nova regularidade que respeita ao número de crianças (Figura 12):

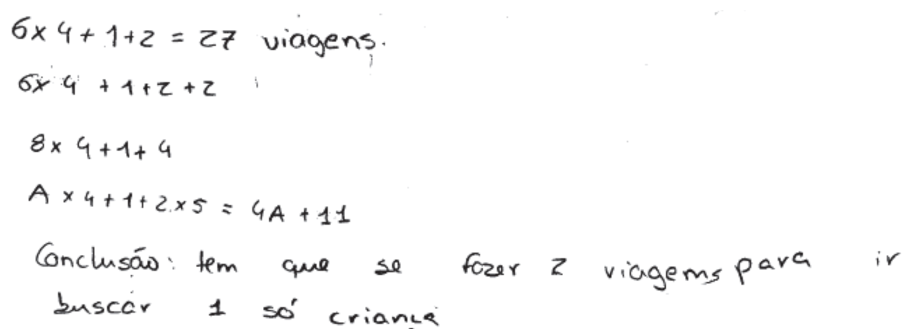


Figura 12 – Resposta de Joana e Catarina após a discussão na Questão 6

Síntese. No final da aula é retomada a regularidade identificada na primeira questão e revisto o significado da expressão algébrica que generaliza a situação qualquer que seja o número de adultos, mantendo duas crianças no grupo. É analisada a impossibilidade de simplificação da expressão $4A+1$. Os alunos verificam que esta expressão não é equivalente a $5A$, tanto com base no contexto como usando a propriedade distributiva. A interpretação dos seus termos de acordo com o contexto é, assim, recordada pelos alunos e identifica-se a sua importância para uma adequada análise dos resultados obtidos nas duas últimas questões. Na questão 5 verifica-se que um dado número corresponde ao número de viagens realizado por um grupo de adultos e duas crianças se depois de subtrair 1 o número obtido for divisível por 4. Na última questão destaca-se o facto de se ter utilizado a resposta à questão 1 para se compreender o que acontece quando se aumenta o número de crianças, bem como o uso da expressão $4A+1$ para determinar o número de viagens para *A* adultos e diferentes números de crianças.

Discussão e conclusão

As aulas acima indicadas têm por base tarefas de exploração e investigação destinadas a promover aprendizagens importantes. Na resolução da tarefa “Dobras e mais dobras” os alunos utilizam estratégias de visualização apoiadas nas representações ativas e pictóricas. Usam com facilidade a representação decimal, embora tenham dela uma compreensão ainda limitada. Usam também representações verbais mas mostram não conhecer a linguagem específica das frações.Com a realização desta tarefa, os alunos desenvolvem a sua capacidade de usar os diversos tipos de representação dos números racionais, em especial as frações e a linguagem verbal que lhes estão associadas e recordam a representação em percentagem. Utilizam também como estratégia o referencial de metade (POST, BEHR & LESH, 1986) para relacionar as diferentes partes de uma tira, mostrando perceber o padrão em causa e usam esse conhecimento para chegar às representações seguintes sem partir sempre da unidade. Além disso, concluem que à medida que aumenta o número de partes, estas ficam cada vez menores. Deste modo, estabelecem diversas relações multiplicativas entre $^1/_2$, $^1/_4$ e $^1/_8$ que os ajudam no desenvolvimento do sentido de número racional.

A realização desta tarefa permite atingir a generalidade dos objetivos previstos pela professora. Assim, os alunos conseguem reconhecer várias representações de número racional e enunciam por si próprios regras para converter numerais decimais em percentagem, apesar de por vezes não as aplicarem nas questões seguintes. Comparam diversos números racionais nas representações ativa e pictórica e estabelecem relações multiplicativas simples (dobro, metade) e um pouco mais complexas (quádruplo, um quarto). Mostram algum sentido de frações equivalentes e conseguem comparar as três frações apresentadas, embora, como seria de esperar, não cheguem a representar a razão como fração. No entanto, na realização da tarefa, os alunos revelam duas dificuldades significativas. A primeira, de natureza geral, tem a ver com a compreensão do enunciado das questões quando este envolve termos cujo significado não lhes é familiar. A segunda, mais específica, tem a ver com a insegurança observada no trabalho com numerais decimais, já aprendidos no 1.º ciclo. Estas dificuldades, registadas pela professora, foram objeto de atenção nas aulas subsequentes.

Os resultados globais desta experiência de ensino (QUARESMA, 2010) mostram que os alunos melhoram a sua compreensão da representação fraccionária e da percentagem e até da representação decimal. Além disso, desenvolvem a sua compreensão da comparação e ordenação dos números racionais, utilizando, sobretudo, a representação decimal. A hipótese de ensino-aprendizagem é sustentada pela compreensão que os alunos revelam dos números racionais, mostrando perceber que um número racional pode ser representado de diversas formas e mostrando flexibilidade na escolha da representação mais adequada e com a qual conseguem resolver as tarefas propostas.

A realização da tarefa "Atravessando o rio" atinge também os objectivos previstos pela professora. A exploração inicial realizada pelos alunos, de modo informal, levaos a formular uma generalização e, posteriormente, estudar de modo mais formal a situação. Deste modo, constroem as suas representações da situação e o uso da letra surge de modo natural, com o significado de número generalizado. A apresentação das descobertas dos alunos, por eles próprios, usando as suas palavras e os seus esquemas e símbolos, permite uma melhor compreensão da situação e a atribuição de significado à generalização que expressam em linguagem algébrica. Os alunos desenvolvem também a sua capacidade de interpretação da linguagem algébrica a partir da sua análise de diferentes expressões, nomeadamente no que respeita à utilização de propriedades das operações. Finalmente, analisam a influência da variação do número de adultos e do número de crianças no número de travessias necessária. Generalizam esta situação usando a linguagem natural e símbolos matemáticos, identificando a necessidade de realizar duas viagens por cada criança que acresce a um grupo de A adultos e duas crianças.

Os momentos de trabalho autónomo em pares possibilitam aos alunos progredir na interpretação da situação e na procura de respostas e discutir de modo detalhado várias possibilidades. As discussões coletivas, numa fase inicial ajudam a compreensão da situação, numa fase intermédia permitem a partilha de representações e a identificação de regularidades de modo a que todos consigam progredir nas questões seguintes e numa fase final, favorecem a sistematização de conclusões e dos resultados obtidos, bem como a análise de situações mais complexas.

Os resultados globais desta experiência de ensino (BRANCO, 2008) mostram que os alunos desenvolveram alguns aspetos do pensamento algébrico, nomeadamente a capacidade de generalizar e de usar a linguagem algébrica para expressar as suas generalizações, sustentando também a hipótese de ensino-aprendizagem. No entanto, a evolução dos alunos não é igualmente significativa em todos os temas abordados. Na resolução de problemas envolvendo equações, privilegiam estratégias aritméticas e manifestam alguma dificuldade em usar a linguagem algébrica para representaras situações propostas. Revelam evolução na compreensão da linguagem algébrica relativa aos diferentes significados dos símbolos em diversos contextos e ao significado e à manipulação de expressões mas, em diversos aspetos específicos essa compreensão é ainda frágil, sugerindo que terão ainda um longo caminho a percorrer com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Deve notar-se que, para além da natureza exploratória e investigativa das tarefas, estes resultados decorrem também da estrutura da aula e do estilo de comunicação promovido pelas professoras. Ambas as aulas decorreram em ciclos compostos de (i) apresentação e interpretação da tarefa, (ii) trabalho autónomo dos alunos em pares ou grupos, e (iii) discussão coletiva. O trabalho foi concluído com uma síntese das ideias principais. O estilo de comunicação promovidos pelas professoras procurou valorizar as contribuições dos alunos, valorizando a argumentação e contra-argumentação entre eles. Trata-se de um tipo de aula que tem vindo a ser cada vez mais utilizado em Portugal, no âmbito do novo programa de Matemática do ensino básico, com resultados muito positivos em termos de aprendizagem (PONTE, NUNES & QUARESMA, em publicação).

As situações que apresentamos mostram que as tarefas de exploração e investigação podem constituir a base do trabalho quotidiano na sala de aula, tendo em vista a aprendizagem dos conceitos, representações e procedimentos que constituem o núcleo central do currículo de Matemática, ao mesmo tempo que constituem um terreno favorável para o desenvolvimento de capacidades transversais como o raciocínio e a comunicação matemática. Ao contrário dos problemas que, como vimos, tendem a assumir um papel marginal nas práticas dos professores, verificamos que a realização do ensino tendo por base explorações e investigações pode ser naturalmente integrada no ensinoaprendizagem dos mais diversos tópicos matemáticos. O desenvolvimento das condições para que isso aconteça em cada contexto educativo coloca, certamente, interessantes desafios aos professores e aos educadores matemáticos que nele atuam.

Referências

BEHR, M.; POST, T. Teaching rational number and decimal concepts. In: POST, T. **Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods** 2.ed. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1992. p.201-248.

BLANTON, M.; KATUT, J. Characterising a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, VA, v.36, n.5, p.412-446, nov. 2005.

BRANCO, N. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.** 2008. 251p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em 31 julho 2011.

HERBERT, K.; BROWN, R. Patterns as tools for algebraic reasoning. In: MOSES, B. **Algebraic thinking, grades K-12**. Reston, VA: NCTM, 1999. p.123-128.

KIERAN, C. The learning and teaching of algebra. In: GROUWS D. A. **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. New York, NY: Macmillan, 1992. p.390-419.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Organização curricular e programas (3.º ciclo do ensino básico)**. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda, 1991.

MENEZES, L. et al. **Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano (Materiais de apoio ao professor)**. Lisboa: DGIDC, 2008. Disponível em: <http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/015_Sequencia_Racionais_n% C3%A3o_negativos_NPMEB_2c5_(Julho2009).pdf>. Acesso em: 31 julho 2011.

NCTM. **An agenda for action**. Reston, VA: NCTM, 1980.

PAPERT, S. Ensinar as crianças a serem matemáticos vs ensinar matemática. In: PONTE, J. P. **O computador na educação matemática**. Lisboa: APM, 1991. p.29-44. (Publicação original 1971)

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1975.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI. **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; CANAVARRO, A. P. (1994). A resolução de problemas nas concepções e práticas dos professores. In: FERNANDES, D.; BORRALHO, A.; AMARO G. **Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1994. p.197-211.

PONTE, J. P.; NUNES, C. C.; QUARESMA, M. Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: elementos fundamentais para a aprendizagem. In: SILVA, A. C.; CARVALHO, M.; RÊGO, R. G. **Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes na educação básica**. Cuiabá: UFMT, em publicação.

POST, T.; BEHR, M.; LESH, R. Research-based observations about children's learning of rational number concepts. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v.8, n.1, p.39-48, Win 1986.

QUARESMA, M. **Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino**. 2010. 259 p.. Dissertação (Mestrado em Educação) - Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/handle/10451/2451>. Acesso em: 31 julho 2011.